

Topología
Segundo Cuatrimestre – 2025
Práctica 3
Topologías iniciales y finales

Subespacios

Ejercicio 1. Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X . Pruebe que si $Z \subseteq A$, entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X .

Ejercicio 2. Sea X un conjunto ordenado con la topología del orden y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto.

- (I) Muestre que la topología del orden de Y no necesariamente coincide con la topología de Y como subespacio de X .
- (II) Y se dice *convexo* si para cada $a, b \in Y$ se tiene que $(a, b) \subseteq Y$. Pruebe que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.

Productos

Ejercicio 3. Sean X e Y espacios topológicos. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y . Pruebe que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.

Ejercicio 4. Sean X e Y dos espacios topológicos. Pruebe que si X e Y son (arco)conexos, entonces $X \times Y$ es (arco)conexo.

Ejercicio 5. Sean X e Y espacios topológicos. Pruebe que las proyecciones $p_X: X \times Y \rightarrow X$ y $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas. Halle ejemplos en los que no sean cerradas.

Ejercicio 6. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Una función $f: X \times Y \rightarrow Z$ se dice *continua en X* si $f(-, y): X \rightarrow Z$ es continua para todo $y \in Y$. Análogamente, f se dice *continua en Y* si $f(x, -): Y \rightarrow Z$ es continua para todo $x \in X$.

- (I) Pruebe que si f es continua, entonces es continua en cada variable.
- (II) Dé un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

Ejercicio 7. Pruebe que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología discreta. Compare con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 8. Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}$ y cuya topología tiene como base de abiertos al conjunto $\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea L una recta en el plano. Describa la topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

Ejercicio 9. Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Pruebe que las funciones $f: X \rightarrow X \times Y$ y $g: Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

Ejercicio 10. Sea X un espacio métrico con métrica $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que la topología inducida por la métrica es la menos fina que hace que d sea una función continua.

Ejercicio 11. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subespacio $A_i \subseteq X_i$. Pruebe que $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Ejercicio 12. Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto con proyecciones $\{p_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$. Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X , pruebe que $x_\alpha \rightarrow x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in I$.

Ejercicio 13. Sea $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ el conjunto de sucesiones de números reales.

(I) Decida si la función $f: t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 2t, 3t, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ es continua al equipar a $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto. ¿Y con la topología caja?

(II) Decida si la sucesión

$$(1, 1, 1, 1, \dots), \quad (0, 2, 2, 2, \dots), \quad (0, 0, 3, 3, \dots), \quad \dots$$

converge en $\mathbb{R}^\omega$ equipado con la topología caja. ¿Y con la topología producto?

(III) Calcule la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero en $\mathbb{R}^\omega$ con respecto a las topologías producto y caja.

Cocientes

Ejercicio 14. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Pruebe que si existe $g: Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

Ejercicio 15. Sea $p: X \rightarrow Y$ una función cociente. Pruebe que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

Ejercicio 16. Sea G un grupo. Un G -espacio es un espacio topológico X junto con una acción $\cdot: G \times X \rightarrow X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo $g \in G$.

(a) Pruebe que los siguientes son G -espacios:

(I) $X = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{Z}^n$ y la acción es $(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n)$.

(II) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ y la acción es $\bar{0} \cdot x = x$, $\bar{1} \cdot x = -x$.

(III) $Y = B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

(b) Pruebe que la proyección canónica $X \rightarrow X/G$ es abierta; y que si G es finito, entonces también es cerrada.

(c) Pruebe que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \dots \times S^1$ es homeomorfo al producto de n copias del círculo.

(d) Pruebe que $S^n/\mathbb{Z}_2$ es homeomorfo al cociente de $I \times I$ bajo la relación que identifica a $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$ y a $(x, 0)$ con $(1 - x, 1)$ para todo $x \in [0, 1]$. Este espacio se conoce como el *plano proyectivo real* $\mathbb{RP}^n$.

(e) Pruebe que $B/\mathbb{Z}$ es homeomorfo al cociente de $I \times I$ bajo la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$ para todo $y \in [0, 1]$. Este espacio se conoce como la *banda de Möbius*.

Familias iniciales y finales

Ejercicio 17. Pruebe que si $f: X \rightarrow Y$ es inyectiva y final, entonces es subespacio.

Ejercicio 18. Pruebe que si $f: X \rightarrow Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.

Ejercicio 19. Sea X un espacio topológico con topología τ , y sea $S = \{0, 1\}$ el espacio de Sierpinski. Pruebe que la familia $\{\chi_{(X \setminus U)}: X \rightarrow S\}_{U \in \tau}$ es inicial.

Ejercicio 20. Sea $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones continuas, y sea $\text{ev}: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ la *función evaluación* definida por $\text{ev}(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. Pruebe que $\text{ev}|: X \rightarrow \text{im}(\text{ev})$ es abierta.

Ejercicio 21. Decimos que una familia de funciones continuas $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ *separa puntos* de X si para todo $x \neq y \in X$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pruebe que si $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ separa puntos, entonces es una familia inicial para la topología de X si y sólo si la función evaluación $\text{ev}: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es subespacio.

Ejercicio 22. Sean $\{f_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ una familia de funciones continuas. Pruebe que $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia final si y sólo si $(f_i)_{i \in I}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ es final.