

Topología

Segundo Cuatrimestre – 2025
Práctica 2
Conexión

Ejercicio 1. Sean X un conjunto y τ, τ' dos topologías sobre X . Pruebe que si (X, τ) es un espacio topológico conexo y $\tau' \subseteq \tau$, entonces (X, τ') es un espacio topológico conexo.

Ejercicio 2. Sea X un espacio topológico y $\{0, 1\}$ el espacio discreto de dos puntos. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) el espacio X es conexo;
- (II) toda función continua $X \rightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico.

- (I) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tal que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.
- (II) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

Ejercicio 4. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Pruebe que si A es conexo, entonces todo subespacio B de X tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ resulta conexo.

Ejercicio 5. Muestre que entre los espacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos, y que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $n > 1$.

Ejercicio 6. Sea $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Ejercicio 7. Muestre que si $B \subset S^2$ es finito, entonces $S^2 \setminus B$ es conexo.

Ejercicio 8. Un espacio topológico X se dice *localmente conexo* si para cada punto $x \in X$ y entorno $V \ni x$ existe un abierto conexo U tal que $x \in U \subset V$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) X es localmente conexo.
- (b) Las componentes de todo subespacio abierto de X son abiertas en X .
- (c) Los abiertos conexos de X forman una base de la topología de X .

Concluya que si X es localmente conexo, entonces las componentes conexas de X son abiertas.

Ejercicio 9. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $f|_U$ es constante. Pruebe que si f es localmente constante y X es conexo, entonces f es constante.

Ejercicio 10. Pruebe que si A, B son subespacios arcoconexos de un espacio topológico X y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arcoconexo.

Ejercicio 11. Un espacio topológico X se dice *localmente arcoconexo* si para cada punto $x \in X$ y entorno $V \ni x$ existe un abierto arcoconexo U tal que $x \in U \subset V$. Pruebe que si X es localmente arcoconexo y conexo, entonces es arcoconexo.