

Topología
Segundo Cuatrimestre – 2025
Práctica 1
Espacios topológicos

Ejemplos

Ejercicio 1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y . Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

Ejercicio 2 (Topología cofinita). Sea X un conjunto. Pruebe que $\tau = \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X .

Ejercicio 3. Sean X un conjunto infinito, $x_0 \in X$ y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0 . Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Pruebe que existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

Ejercicio 5. Decimos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es *radialmente abierto* si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de esta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual.

Ejercicio 6 (La topología Zariski). Considere un cuerpo k , $n \in \mathbb{N}$, y $k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en k . Para cada subconjunto $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, se define el *conjunto algebraico dado por S* como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall p \in S\}.$$

Pruebe que existe una topología en k^n cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos.

Ejercicio 7 (Espacios de Alexandroff). Sea $(P, \leq)$ un *poset*, es decir, un conjunto P junto con una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica $\leq$. Un conjunto $U \subset P$ se dice una *sección inicial* si para cada $u \in U$ y $x \in P$ se tiene que $x \leq u$ implica $x \in U$. Pruebe que

$$\tau = \{U \subset P : U \text{ es sección inicial}\}$$

define una topología en P .

Construcción de topologías

Ejercicio 8 (Filtros de entornos). Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos* $\mathcal{F}$ en X es una función

$$\mathcal{F}: X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \quad x \mapsto \mathcal{F}_x$$

que satisface las siguientes propiedades

- (A1) si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$;
- (A2) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;
- (A3) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $B \supset A$ implica $B \in \mathcal{F}_x$;
- (A4) si $x \in X$ y $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;
- (A5) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

Pruebe que:

- (I) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X .

- (II) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología sobre X .

- (III) Las construcciones de los ítems anteriores son inversas.

Ejercicio 9 (Operadores de clausura). Sea X un conjunto. Una función $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en X* si:

- (C1) $c(\emptyset) = \emptyset$;
- (C2) $A \subseteq c(A)$ para todo $A \subset X$;
- (C3) $c(c(A)) = c(A)$ para todo $A \subset X$;
- (C4) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ para todo $A, B \subset X$.

Pruebe que

- (I) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c: A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X .

- (II) Si $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X , entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X .

- (III) Las construcciones de los ítems anteriores son inversas.

Ejercicio 10. Sean X un conjunto y $B \subseteq X$. Pruebe que la función

$$c: A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en X . Describa los abiertos de la topología correspondiente.

Clausura, interior, frontera

Ejercicio 11. Sean X un espacio topológico y $A, B, (A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$. Pruebe las siguientes inclusiones y decida cuáles de ellas pueden ser estrictas:

- (I) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
- (II) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ si A es abierto;
- (III) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$;
- (IV) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$;
- (V) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^\circ \subseteq (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^\circ$ y
- (VI) $(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^\circ \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^\circ$.

Ejercicio 12. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Pruebe que:

- (I) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$;
- (II) $X \setminus \partial A = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$;
- (III) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
- (IV) $A^\circ = A \setminus \partial A$;
- (V) A es abierto si y sólo si $A \cap \partial A = \emptyset$;
- (VI) A es cerrado si y sólo si $\partial A \subseteq A$.

Ejercicio 13. Sea X un conjunto equipado con la topología cofinita, es decir, la descrita en el Ejercicio 2. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

Ejercicio 14 (El cuadrado ordenado). Considere el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X :

- (I) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
- (II) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
- (III) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
- (IV) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
- (V) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

Ejercicio 15. Pruebe que todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Bases y sub-bases

Ejercicio 16. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de topologías en X . Pruebe que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha$ una topología en X ?

Ejercicio 17. Sean X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pruebe que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X tal que:

- (1) todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, es decir, $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$, y
- (2) si τ es una topología tal que $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

En otras palabras $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$. Se denomina la *topología generada por $\mathcal{A}$* .

Ejercicio 18. Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

Ejercicio 19. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Para cada $x \in X$, consideremos $S_x = \{y \in X : y < x\}$ y $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Sean $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$. Pruebe que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una subbase para la topología del orden.

Ejercicio 20. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- $\mathcal{B}' = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \{U \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} : U \in \mathcal{B}\}$.

Muestre que $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ definen bases para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes. Determine además la clausura del conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ en cada caso.

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

Ejercicio 22. Sean k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos sobre k^n la topología Zariski, es decir, la caracterizada en el Ejercicio 6. Para cada $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, sea $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$. Pruebe que la familia

$$\mathcal{B} = \{D_f : f \in k[x_1, \dots, x_n]\}$$

es una base de abiertos. Pruebe además que si k es infinito y $f \neq 0$ entonces D_f es denso.

Redes

Ejercicio 23. Sea (X, τ) un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ una red. Pruebe que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (I) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a dicha constante.
- (II) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
- (III) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda subred tiene una subsubred que converge a x , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .

Ejercicio 24. Sean X un espacio topológico y $\Lambda, \{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ conjuntos dirigidos. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$. Considere $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto. Pruebe que la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

Ejercicio 25. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruebe que

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A \text{ tal que } x_\alpha \rightarrow x\}.$$

Ejercicio 26. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en un espacio X , decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$ el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Pruebe que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x .

Sugerencia: para probar $\Rightarrow$, considere como conjunto dirigido el formado por los pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$ y U un entorno (abierto) de x que contiene a x_α .

Funciones continuas

Ejercicio 27. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Pruebe que cada una de las siguientes condiciones es equivalente:

- (I) La función f es continua.
- (II) Para todo $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_{f(x)}$, existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

(III) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$ convergente a cierto $x \in X$, la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $f(x)$.

(IV) Para todo $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(V) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y , entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

(VI) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 28. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Sea $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E . Pruebe que χ_E es continua en x si y sólo si $x \notin \partial E$.

Ejercicio 29.

a) Sean X, Y conjuntos ordenados con la topología del orden. Pruebe que si $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

b) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

Ejercicio 30 (Lema de pegado). Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Pruebe que f es continua en cada uno de los siguientes casos:

a) A_α es abierto para todo $\alpha \in \Lambda$;

b) Λ es finito y A_α es cerrado para cada $\alpha \in \Lambda$.

Ejercicio 31. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas.

(I) Pruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .

(II) Pruebe que $\min\{f, g\}$ es continua.

Ejercicio 32. Pruebe que un morfismo de posets $f: P \rightarrow Q$ resulta continuo si equipamos a P y Q con la topología del Ejercicio 7.

Ejercicio 33. Sean k un cuerpo y $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. Pruebe que

$$F: k^n \rightarrow k^m, \quad F(p_1, \dots, p_n) = (f_1(p_1, \dots, p_n), \dots, f_m(p_1, \dots, p_n))$$

es una función continua si equipamos a k^n y k^m con la topología Zariski.