

EL PEINE DEL TOPÓLOGO NO ES ARCOCONEXO

Sean $I = [0, 1]$ y $P := \{(0, 1)\} \cup (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \geq 1} \{1/n\} \times I$.

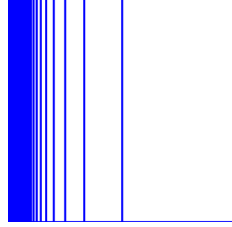


Figura 1. El espacio P .

Lema 1. Si $\gamma: I \rightarrow P$ es un arco tal que $\gamma(0) = (x, y)$ con $x > 0$ y $\gamma(1) = (0, 1)$, existen $0 < t < 1$ y $s \in I$ tales que $\gamma(t) = (s, 0)$.

Demostración. Sea $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primera coordenada. Como $\pi_1\gamma(I)$ es un conexo de $\mathbb{R}$ que contiene a 0 y a $x > 0$, contiene al intervalo $[0, x]$. En particular, dado $s \in (0, x) \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ deben existir $z \in \mathbb{R}$ y $t \in I$ tales que $\gamma(t) = (s, z)$. Como los únicos puntos de P con segunda coordenada positiva tienen primera coordenada o bien de la forma $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ o bien nula, necesariamente $z = 0$. Por otro lado, como $0 < s < x$ debe ser $t \neq 0$ y $t \neq 1$; es decir $0 < t < 1$. Esto concluye la prueba. $\square$

Proposición 1. El espacio P no es arcoconexo.

Demostración. Basta ver que no existen arcos $\gamma: I \rightarrow P$ entre $(1, 1)$ y $(0, 1)$. Supongamos que existe un tal arco γ . Como $F = \gamma^{-1}(\{(1, 1)\})$ es un cerrado no vacío del intervalo unitario I , existe $b = \min F$. Reemplazando γ por $\gamma(b \cdot -)$ de ser necesario, podemos suponer entonces que $\gamma(t) = (0, 1)$ si y sólo si $t = 1$.

Por el Lema 1, sabemos que $G = \gamma^{-1}(I \times \{0\})$ es un cerrado no vacío de I , así que existe $a = \max G < 1$. Sea $c = \frac{a+1}{2}$. Por maximalidad de a , sabemos que $\gamma(c) \in \bigcup_{n \geq 1} \{1/n\} \times (0, 1]$, así que es posible aplicarle el Lema 1 a $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(c + (1 - c) \cdot t)$. Obtenemos así $c < t < 1$ tal que $\gamma(t) \in I \times \{0\}$, lo cual contradice la maximalidad de a . El absurdo provino de suponer la existencia de un tal arco γ . $\square$