

Clase Práctica: Topologías iniciales y finales

Topología inicial.

Comencemos repasando qué es una topología inicial. Intuitivamente, es la topología menos fina (con menos abiertos) que se le puede dar a un conjunto para que una familia de funciones que salen del él sean continuas.

Definición: Sea $\{Y_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea X un espacio topológico y sean $f_i : X \rightarrow Y_i$ funciones. Decimos que $\{f_i\}_{i \in I}$ es una **familia inicial** si para todo Z espacio topológico y para toda $g : Z \rightarrow X$ función, g es continua si y solo si $f_i \circ g : Z \rightarrow Y_i$ es continua para todo $i \in I$.

Equivalentemente, si $\beta = \{f_i^{-1}(U_i) : U_i \subseteq Y_i \text{ abierto}, i \in I\}$ es una subbase de X .

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ & & \searrow f_i \circ g & & \nearrow \end{array}$$

Si X no tiene una topología, decimos que dotamos a X con la **topología inicial** respecto de la familia $\{f_i\}_{i \in I}$ si dotamos a X de la topología generada por la subbase β . Como la preimagen se porta bien con la intersección (e intersección de finitos abiertos es abierto) tenemos que

$$\left\{ \bigcap_{j \in J} f^{-1}(U_j) : U_j \subseteq Y_i \text{ abierto}, J \subseteq I \text{ finito} \right\}$$

es una base de la topología inicial inducida por la familia $\{f_i\}_{i \in I}$. Notar que cuando la familia tiene una única función, entonces vale que U es un abierto de X si y solo si es preimagen de un abierto. En ese caso, decimos que la función es inicial.

¿Qué ejemplos conocemos?

- Dado X un espacio topológico y $A \subseteq X$, la topología subespacio de A coincide con la topología inicial inducida por la inclusión. Es la única topología que hace que restringir y correstringir funciones continuas mantenga la continuidad.
- Dada $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, la topología producto en $\prod_{i \in I} X_i$ coincide con la topología inicial inducida por las proyecciones.

Es la única que hace que una función que llega a $\prod_{i \in I} X_i$ sea continua si y solo si lo es coordenada a coordenada.

El primer ejemplo se puede generalizar un poco y ayudarnos a entender cuándo un espacio topológico se puede ver como subespacio de otro.

Definición: Dados X y A dos espacios topológicos, una función $f : A \rightarrow X$ se dice **subespacio** si $f|_{Im(f)} : A \rightarrow Im(f)$ es un homeomorfismo, considerando a $Im(f)$ con la topología subespacio.

Tarea: Demostrar que una función es subespacio si y solo si es inyectiva e inicial. (*Hagan la tarea...*)

Observación útil: Notar que si f es continua, inyectiva y abierta (o cerrada) entonces es subespacio. NO vale la vuelta.

Ahora sí, terminados los preliminares nos ponemos a trabajar.

Ejercicio 1. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sean $g_i : Y \rightarrow Z_i$ continuas para todo $i \in I$. Probar que

- Si $\{g_i \circ f : X \rightarrow Z_i\}_{i \in I}$ es una familia inicial, entonces f es inicial.
- Si f y $\{g_i\}_{i \in I}$ son iniciales, entonces también lo es $\{g_i \circ f\}_{i \in I}$. En particular, composición de funciones subespacio es subespacio.

Demostración: Asumamos que $\{g_i \circ f\}_{i \in I}$ es una familia inicial, queremos ver que f es inicial. Como f es continua, alcanza (¿por qué?) con ver que para todo W espacio topológico y toda función $h : W \rightarrow X$, vale que si $f \circ h$ es continua entonces h es continua. Como g_i es continua para todo $i \in I$, si $f \circ h$ es continua entonces $(g_i \circ f) \circ h$ también lo es, pero como $\{g_i \circ f\}_{i \in I}$ es una familia inicial, h es continua como queríamos ver.

Asumamos ahora que f y $\{g_i\}_{i \in I}$ son iniciales. Queremos ver que $\{g_i \circ f\}_{i \in I}$ también lo es, es decir, queremos ver que para todo W espacio topológico y toda función $h : W \rightarrow X$, vale que si $g_i \circ f \circ h$ es continua, entonces h es continua. Como f es inicial, para ver que h es continua basta con ver que $f \circ h$ es continua. Como $\{g_i\}_{i \in I}$ es inicial, para ver que $f \circ h$ es continua basta con ver que $g_i \circ f \circ h$ es continua para todo $i \in I$. Pero esto último lo tenemos por hipótesis. Luego, h es continua como queríamos ver. □

Tarea: Comprobar que, con una demo igual pero con más índices, se puede demostrar que si $\{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ y $\{g_i^s : Y_i \rightarrow Z_i^s\}_{(i,s) \in I \times S}$ son familias de funciones entonces valen los mismos resultados, en donde ahora la familia $\{g_i^s \circ f_i\}_{(i,s) \in I \times S}$ cumple el rol que en el ejercicio tiene la familia $\{g_i \circ f\}_{i \in I}$.

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea S el espacio de Sierpinski. Probar que $i : X \rightarrow \prod_{U \in \mathcal{T}} S$ definida como

$$i(x)_U = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in U \\ 1, & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

es una función inicial.

Demostración: Veamos primero que i es continua. Como estamos cayendo en un producto, hay que ver que es continua coordenada a coordenada. Más formalmente, hay que ver que para cada $U \in \mathcal{T}$, $p_U \circ i : X \rightarrow S$ es continua. Pero como $p_U \circ i = \chi_{U^c}$ sabemos que es continua por ser la función característica de un cerrado.

Ahora sí, veamos que i es inicial. Por el ejercicio 1, alcanza con ver que $\{p_U \circ i\}_{U \in \mathcal{T}}$ es una familia inicial. Como la familia es de funciones continuas, alcanza con probar que si $g : Y \rightarrow X$ es tal que $p_U \circ i \circ g$ es continua para todo $U \in \mathcal{T}$, entonces g es continua. Pero ver que g es continua es ver que $g^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{T}$. La magia está en que

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(\chi_{U^c}^{-1}(0)) = (\chi_{U^c} \circ g)^{-1}(0)$$

Como $\chi_{U^c} \circ g$ es continua por hipótesis y el conjunto $\{0\}$ es abierto en S , concluimos que g es continua (y por lo tanto i es inicial). $\square$

El ejercicio anterior en realidad dice algo muy potente. Si X resulta ser un espacio topológico T_0 , entonces la función i del ejercicio no solo resulta inicial, sino que también es inyectiva, por lo que es una función subespacio. Luego, podemos ver a cualquier espacio topológico T_0 como subespacio de un producto de copias de S .

Topología final.

Si la topología inicial aplica cuando tenemos un espacio del que salen muchas funciones, vamos a recurrir a la topología final cuando queremos dotar de una topología a un espacio para el cual llegan muchas funciones. Intuitivamente, va a ser la topología más fina (con más abiertos) que se le puede dar a un conjunto para que una familia de funciones que llegan a él sean continuas.

Definición: Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea Y un espacio topológico y sean $f_i : X_i \rightarrow Y$ funciones. Decimos que $\{f_i\}_{i \in I}$ es una **familia final** si para todo Z espacio topológico y para toda $g : Y \rightarrow Z$ función, g es continua si y solo si $g \circ f_i : X_i \rightarrow Z$ es continua para todo $i \in I$.

Equivalentemente, si se cumple que U es un abierto de Y si y solo si $f_i^{-1}(U)$ es abierto para todo $i \in I$.

$$X_i \xrightarrow{f_i} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\searrow \quad \nearrow$$

$$g \circ f_i$$

Si Y no tiene una topología, decimos que dotamos a Y con la **topología final** respecto de la familia $\{f_i\}_{i \in I}$ si dotamos a Y de la topología

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq Y : f_i^{-1}(U) \text{ es abierto para todo } i \in I\}$$

Notemos que en el caso de la topología final contamos con una descripción de toda su topología. Esto es diferente a lo que sucede con la topología inicial, en donde trabajamos con una base.

Vamos con ejemplos:

- El lema del pegado de toda la vida dice que si X es un espacio topológico y $F_1, \dots, F_n$ son finitos subespacios cerrados que cubren a X , entonces una función que sale de X es continua si y solo si lo es restringiendola a cada F_n . En este contexto podemos reinterpretar el lema del pegado como “si X es un espacio topológico y $F_1, \dots, F_n$ son subespacios cerrados que cubren a X , entonces las inclusiones de F_n en X forman una familia final”.
- El otro lema del pegado de toda la vida nos dice que si X es un espacio topológico y $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de X entonces la familia de inclusiones de U_i en X forman una familia final.
- Dados $\{X_k\}_{k \in I}$ espacios topológicos, podemos considerar su unión disjunta $\coprod_{k \in I} X_k$. **La** topología de la unión disjunta es la topología final respecto a las inclusiones. Es decir, la que tiene como familia inicial a $\{i_k : X_k \rightarrow \coprod_{k \in I} X_k\}_{k \in I}$. En términos de abiertos, $U \subseteq \coprod_{k \in I} X_k$ es abierto si y solo si $U \cap X_k$ es un abierto de X_k para cada $k \in I$, o lo que es lo mismo, si podemos escribir a U como una unión de abiertos de los X_k .

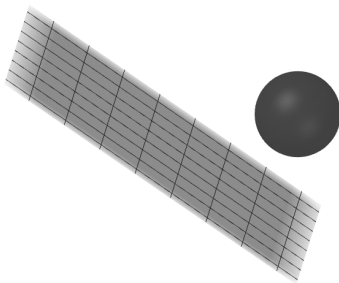


Figura 1: La unión disjunta entre un plano y $\mathbb{S}^2$ (o $\mathbb{D}^3$, andá a saber si eso tiene relleno o no).

- Si X es un espacio topológico y R es una relación de equivalencia, la topología cociente en X/R coincide con la topología final inducida por la proyección al cociente.

Este último ejemplo también se puede generalizar. Una definición equivalente de función cociente a la que se vio en las clases anteriores es la siguiente.

Proposición: Dada $f : X \rightarrow Y$. Entonces f es cociente si y solo si es sobreyectiva y final.

Otra observación útil: Vieron con Guido que una función sobreyectiva, continua y abierta (o cerrada) es cociente. NO vale la vuelta.

Fin de los preliminares, toca laburar.

Ejercicio 3. Sea S el espacio de Sierpinski. Probar que $f : [0, 1] \rightarrow S$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es una función cociente.

Notar que esto implica que, si partimos del $[0, 1]$ (un espacio métrico) y nos permitimos construir nuevos espacios topológicos únicamente usando cocientes, productos y subespacios, podemos construir a todos los espacios topológicos T_0 .

Demostración: Este ejercicio se puede hacer usando abiertos saturados y es casi igual. Para practicar, vamos que f es sobreyectiva y final.

Sabemos que f es continua (¿por qué?) y es claro que es sobreyectiva. Luego, para ver que es final alcanza con comprobar que, dado Y un espacio topológico y $g : S \rightarrow Y$ una función tal que $g \circ f$ es continua, entonces g es continua. Dado $U \subseteq Y$ abierto, queremos ver que $g^{-1}(U)$ es abierto. Por cómo es la topología de S , alcanza con ver que $g^{-1}(U) \neq \{1\}$. Pero de ser así, $(g \circ f)^{-1}(U) = \{1\}$, lo que es absurdo puesto que $g \circ f$ es continua y $\{1\}$ no es un abierto de $[0, 1]$. Luego, $g^{-1}(U) \neq \{1\}$ y g es continua. □

Ejercicio 4. Probar que la topología radial abierta de $\mathbb{R}^2$ es la topología final respecto a las inclusiones de las rectas en $\mathbb{R}^2$. Pensar por qué esto implica que una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 con la radial abierta si y solo si los límites acercándonos a x_0 por rectas “a lo análisis 1” nos dan bien. Pensar también qué topología tenemos que utilizar si queremos que nuestras funciones continuas estén determinadas por acercarnos por otro tipo de curvas.

Demostración: Veamos directamente que las topologías coinciden. Sabemos que la topología final está dada por

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R}^2 : i_L^{-1}(U) \text{ es abierto para toda recta } L\}$$

en donde $i_L : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión de L en $\mathbb{R}^2$. Pero como $i_L^{-1}(U) = U \cap L$, estamos pidiendo que las intersecciones con cada recta sean abiertos relativos de las rectas, por lo que las topologías coinciden. □

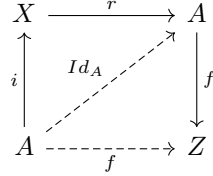
Tarea: Probar que vale el análogo al ejercicio 1 (y a su tarea) para familias finales. La demo es casi igual pero con las flechas para el otro lado. En particular, composición de funciones cocientes es cociente.

Ejercicio 5. Sean $r : X \rightarrow A$ e $i : A \rightarrow X$ dos funciones continuas tales que $r \circ i = Id_A$. Entonces i es subespacio y r es cociente.

Pensar por que NO se puede sacar la hipótesis de continuidad.

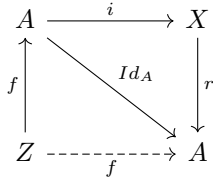
Demostración: Ya tenemos que r es sobreyectiva y que i es inyectiva. Para ver que son funciones finales/iniciales hagamos primero una demostración honesta y después una en dos renglones usando propiedades.

Comencemos por la versión “a mano”. Como r es continua, para ver que es final alcanza con ver que para todo espacio topológico Z y toda función $f : A \rightarrow Z$ vale que si $f \circ r$ es continua entonces f también lo es.



Como $f \circ r$ es continua e i es continua, entonces $f \circ r \circ i$ es continua. Pero como $f \circ r \circ i = f$, concluimos que f es continua y por lo tanto r es final.

De forma análoga, se puede probar que i es una función inicial.



Si no queremos usar flechitas, podemos decir lo siguiente. Notemos que Id_A (o más en general, cualquier homeomorfismo) es una función final e inicial (¿por qué?). Luego, por el ejercicio 1, como r e i son continua y la identidad es inicial, entonces i es inicial. De forma análoga, como r e i son continuas y la identidad es final, r es final.

Notar que este argumento es más general: Si r e i son funciones continuas tales que $r \circ i$ es inicial y final al mismo tiempo, entonces r es final e i es inicial. $\square$

Corolario directo del ejercicio 5: Sea X un espacio topológico y sea R una relación de equivalencia de X . Sea $A \subseteq X$ un conjunto de representantes de R tal que $r : X \rightarrow A$ definida por tomar el representante en la clase de equivalencia es una función continua. Entonces r es una función cociente y X/R es homeomorfo a A (y coincide con $X/\sim_r$).

Demostración: Pensarla. Acordarse de la clase de Guido. Si no se entiende no dejar de consultarlo. $\square$

Ejercicio 6. Rehacer el ejercicio de Guido del espacio proyectivo usando estas nuevas herramientas. Más específicamente, definimos en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la relación de equivalencia R como aRb si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lambda b$ y definimos en $\mathbb{S}^n$ la relación de equivalencia R' como $xR'y$ si y solo si $y = \pm x$. Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/R$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n/R'$.

Demostración: La idea es la siguiente. Si pensamos en por qué el resultado tiene sentido, la imagen que se nos viene a la cabeza es que, como en $\mathbb{S}^n$ hay representantes de todas las clases de R , deberíamos poder “pegar las cosas” en dos pasos: primero quedarnos solo con $\mathbb{S}^n$ y después terminar de pegar lo que nos quedó pendiente. Eso se puede formalizar de la siguiente forma.

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{x}{\|x\|}} \mathbb{S}^n \xrightarrow{q} \mathbb{S}^n/R' \\ \xrightarrow{\quad r \quad} \end{array}$$

Si consideramos una nueva relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\hat{R}$, dada por

$$a\hat{R}b \iff \exists \lambda > 0 \text{ tal que } a = \lambda b$$

entonces $\mathbb{S}^n$ es un conjunto de representantes de $\hat{R}$. Como tomar representantes en $\hat{R}$ está dado por la función

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

que es continua, por el corolario tenemos que f es una función cociente.

Si llamamos $q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/R'$ a la proyección al cociente y r a $q \circ f$, como composición de funciones cocientes es cociente, tenemos que r es una función cociente. Luego, $\mathbb{S}^n/R'$ es un espacio homeomorfo a $(\mathbb{R}^n - \{0\})/\sim_r$. El remate está en que la relación de equivalencia inducida por r es exactamente R . $\square$

Tarea: Comparar esta demo con la que dio Guido y convencerse (o no) de que es esencialmente la misma pero en un marco distinto. Pensar si se puede adaptar a este nuevo marco alguna otra demostración de esa clase.