EL CUADRADO ORDENADO NO ES ARCOCONEXO

Sean $I = [0, 1]$ y $C = I \times I$ equipado con la topología del orden lexicográfico.

Lema 1. *Sea Y un conjunto totalmente ordenado y $D \subset C$ un subespacio conexo. Si $p, q \in D$, entonces $[p, q] = \{z \in C : p \leq z \leq q\} \subset D$.*

Demostración. Si existiera $z \in [p, q] \setminus D$, entonces $D = D \cap (Y \setminus \{z\}) = D \cap (S_z \sqcup R_z) = (D \cap S_z) \sqcup (D \cap R_z)$. Como $p \in D \cap S_z$ y $q \in D \cap R_z$, esto muestra que existe una desconexión de D. El lema se deduce de la afirmación contrarrecíproca. □

Lema 2. *Para cada $t \in I$, la función $\gamma_t \colon I \to C$, $\gamma_t(s) = (t, s)$ es continua.*

Demostración. Basta ver que las preimágenes de abiertos sub-básicos son abiertos de I. En efecto, dado $(a, b) \in C$ tenemos que

$$\gamma_t^{-1}(S_{(a,b)}) = \{s \in I : (t, s) < (a, b)\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t > a \\ [0, b) & \text{si } t = a \\ I & \text{si } t > a \end{cases}$$

y

$$\gamma_t^{-1}(R_{(a,b)}) = \{s \in I : (t, s) > (a, b)\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < a \\ (b, 1] & \text{si } t = a \\ I & \text{si } t > a \end{cases}$$

□

Lema 3. *Sean $0 \leq a, a', b, b' \leq 1$. Si $\gamma \colon I \to C$ es un arco continuo de (a, b) en (a', b'), entonces $a = a'$.*

Demostración. Veamos el contrarrecíproco; supongamos que $a \neq a'$. Cambiando γ por $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ de ser necesario, podemos suponer que $a < a'$. Como (a, b), $(a', b') \in \operatorname{im} \gamma$, e $\operatorname{im} \gamma = \gamma(I)$ es conexo, por el Lema 1 tenemos que

$$\operatorname{im} \gamma \supset [(a, b), (a', b')] \supset \bigsqcup_{a<t<a'} ((t, 0), (t, 1)) = \bigsqcup_{a<t<a'} \{t\} \times (0, 1).$$

Esto implicaría que I contiene no-numerables abiertos disjuntos,

$$I \supset \bigsqcup_{a<t<a'} \gamma^{-1}(\{t\} \times (0, 1)),$$

lo cual es absurdo pues I es separable. □

Proposición 1. *Las componentes arcoconexas de C son*

$$\pi_0(C) = \{\{t\} \times I : t \in I\}.$$

En particular C no es arcoconexo.

Demostración. Ya sabemos que $C = \bigsqcup_{t \in I} \{t\} \times I$ cada subespacio $\{t\} \times I = \operatorname{im} \gamma_t$ es arcoconexo, pues I es arcoconexo y γ_t es continua en vista del Lema 2. Resta ver entonces que cada $\{t\} \times I$ es maximal con la propiedad de ser arcoconexo, lo cual se desprende del Lema 3; dado $(s, b) \in C$ con $s \neq t$, no hay arcos entre este punto y uno de la forma (t, b'). □