Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X e Y dos variables aleatorias integrables definidas en este espacio y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra. Probar las siguientes propiedades:

a) *Linealidad*: Si X e Y son absolutamente integrables entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$ la variable aleatoria $aX + bY$ es absolutamente integrable y además vale

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

b) *Propiedad fundamental de la esperanza condicional*: $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big] = \mathbb{E}(X)$.

c) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ si X es $\mathcal{G}$-medible.

d) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ si $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{G}$.

e) $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})Z)$ para toda Z variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible y acotada.

f) $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ si X es $\mathcal{G}$-medible y XY es integrable.

g) *Propiedad de torres*: Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}$ son dos σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$ entonces

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X|\mathcal{M})\Big|\mathcal{G}\Big] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

h) Si $X \leq Y$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.

i) *Convergencia Monótona*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas tal que $X_n \nearrow X$ entonces $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

j) *Lema de Fatou*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas entonces $\mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$.

k) *Convergencia Mayorada*: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias con $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$ y $|X_n| \leq Y$ para cierta Y absolutamente integrable entonces $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ en casi todo punto y en L^1.

l) *Desigualdad de Jensen*: Si X es absolutamente integrable y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa tal que $\phi(X)$ es integrable entonces $\phi\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G})$. En particular, si X es absolutamente integrable entonces $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$.

m) *Continuidad en L^p*: Si $1 \leq p \leq +\infty$ y $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ entonces

$$\|E(X|\mathcal{G})\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}.$$

En particular, el operador $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}) : L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es continuo.