

PRÁCTICA 3: ESPERANZA CONDICIONAL

“The theory of probabilities is at bottom nothing but common sense reduced to calculus; it enables us to appreciate with exactness that which accurate minds feel with a sort of instinct for which ofttimes they are unable to account.”

PIERRE-SIMON LAPLACE

Ejercicio 1. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una σ -álgebra contenida en \mathcal{F} tal que $P(B) \in \{0, 1\}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

- Caracterizar las variables aleatorias \mathcal{G} -medibles.
- Calcular $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.

Ejercicio 2. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω . Consideremos la σ -álgebra generada por la partición $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \in \mathbb{N})$.

- Caracterizar los conjuntos pertenecientes a \mathcal{G} .
- Caracterizar las variables aleatorias \mathcal{G} -medibles.
- Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ para cualquier variable aleatoria X integrable.
- Concluir que la expresión encontrada en el ítem anterior caracteriza $\mathbb{E}(X|Y)$ para toda Y variable aleatoria discreta. Observar que, en este caso, $\mathbb{E}(X|Y)$ también resulta una variable aleatoria discreta.

Ejercicio 3. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una σ -álgebra contenida en \mathcal{F} . Sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre este espacio tales que Y es \mathcal{G} -medible y X es independiente de \mathcal{G} . Probar que para toda f función medible Borel no negativa

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \int_{\Omega} f(x, Y) dP_X(x).^1$$

Ejercicio 4. ¿Es la esperanza condicional una propiedad distribucional?

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una cierta σ -álgebra contenida en \mathcal{F} . ¿Es cierto que si dos variables aleatorias X e Y definidas en (Ω, \mathcal{F}) tienen la misma distribución entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ y $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ tienen también la misma distribución?

¹Notar que, en el caso $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, esto justifica el razonamiento intuitivo

$$“ \mathbb{E}(f(X, Y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)|Y = y) = \mathbb{E}(f(X, y)) ”$$

si X e Y son independientes.

Ejercicio 5. Una familia $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de variables aleatorias en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se dice *intercambiable* si para toda elección de $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ distintos la distribución del vector aleatorio $X = (X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n})$ coincide con la de $X_\sigma = (X_{\alpha_{\sigma(1)}}, \dots, X_{\alpha_{\sigma(n)}})$ para cualquier permutación de índices σ .

- Probar que si X es una variable aleatoria simétrica respecto del origen entonces el vector $(X, -X)$ es intercambiable.
- Probar que toda familia de variables aleatorias i.i.d. es intercambiable.
- Probar que si el vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ es intercambiable y X_1 es integrable entonces para todo $1 \leq i \leq n$ vale

$$\mathbb{E}\left(X_1 \mid \sum_{i=1}^n X_i\right) = \mathbb{E}\left(X_i \mid \sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Deducir una expresión explícita para $\mathbb{E}(X_1 \mid \sum_{i=1}^n X_i)$. Interpretar.

Independencia condicional

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una cierta σ -álgebra contenida en \mathcal{F} . Dos variables aleatorias X e Y definidas sobre (Ω, \mathcal{F}) se dicen *independientes dada \mathcal{G}* si para todo par de funciones medibles Borel no negativas $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X) \mid \mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G}).$$

Ejercicio 6. ¿Cuándo son dos variables aleatorias X e Y independientes dada la σ -álgebra trivial? ¿Y dada \mathcal{F} ?

Ejercicio 7.

- Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ -álgebra \mathcal{G} si y sólo si para cualquier par $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones medibles Borel no negativas y toda variable aleatoria \mathcal{G} -medible Z no negativa se verifica

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)Z)\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G}).$$

- Mostrar que X e Y son independientes dada una cierta σ -álgebra \mathcal{G} si y sólo si para toda función medible Borel $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G} \vee \sigma(X)) = \mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G}).$$

¿Qué nos dice esto para el caso en que \mathcal{G} es la σ -álgebra trivial?

Aplicaciones

Ejercicio 8. Sean $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas y N otra variable aleatoria tomando valores en \mathbb{N} e independiente de la sucesión $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Probar que si X_1 es integrable y $\mathbb{E}(N) < +\infty$ entonces

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

es una variable aleatoria integrable y calcular su esperanza.

Ejercicio 9.

1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro p . Probar que $X := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$ tiene distribución $\mathcal{G}(p)$.
2. Sea $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$ usando técnicas de esperanza condicional.

Ejercicio 10. Sea $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Calcular la esperanza de la variable aleatoria $N := \inf\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n U_i \geq 1\}$.

Ejercicio 11. A una fiesta concurren N personas, cada una con un sombrero. Al ingresar a la fiesta cada persona deja su sombrero en una caja grande situada en la entrada del salón. Cuando finaliza el evento, las N personas se dirigen a la entrada del salón y extraen un sombrero al azar de la caja. Aquellas personas que sacan su propio sombrero se retiran de la fiesta. El resto vuelve a colocar los sombreros que extrajeron en la caja y luego cada uno de los todavía presentes extrae nuevamente un sombrero al azar. Este procedimiento se repite hasta que las N personas se hayan retirado de la fiesta. Calcular la esperanza de R_N , la cantidad de extracciones que fueron necesarias hasta conseguir que las N personas se retiraran de la fiesta con su sombrero.