Práctica 2: Generalidades

"Any argument where one supposes an arbitrary choice to be made an uncountably infinite number of times [...] is outside the domain of mathematics."
Émile Borel

Ejercicio 1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea P una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Dada una función medible $X : \Omega_1 \to \Omega_2$, para $A \in \mathcal{F}_2$ definimos

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)).$$

a) Demostrar que P_X es una probabilidad en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$.[1]

b) Sea $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible. Probar que

$$f \text{ es } P_X\text{-integrable} \iff f(X) \text{ es } P\text{-integrable}$$

y que, en dicho caso, vale la igualdad

$$\int_{\Omega_2} f dP_X = \int_{\Omega_1} f(X) dP.$$

Ejercicio 2. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad e $Y : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una v.a. con $\mathbb{E}(Y) = 1$. Definimos para $A \in \mathcal{F}$

$$P^Y(A) := \int_A Y \, dP$$

a) Demostrar que P^Y es una probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

b) Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Probar que

$$X \text{ es } P^Y\text{-integrable} \iff XY \text{ es } P\text{-integrable}$$

y que, en dicho caso, vale la igualdad

$$\int_\Omega X dP^Y = \int_\Omega XY dP.$$

Ejercicio 3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria definida allí, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Borel.

a) i. Probar que

$$X \text{ discreta } \iff P_X \ll \mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}$$

donde $\mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}$ denota la medida de contar sobre $\mathcal{A}_X = \{x : P(X = x) > 0\}$, el conjunto de átomos de X.

ii. Mostrar que si X es discreta entonces $p_X = \frac{dP_X}{d\mathrm{N}_{\mathcal{A}_X}}$.

[1] P_X recibe el nombre de *push forward* por X de P. En el caso particular en que $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces X resulta una variable aleatoria tradicional y P_X recibe el nombre de *distribución* de X.

iii. Mostrar que en ese caso si $g(X)$ es P-integrable, o no negativa, entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) p_X(x)$$

b) i. Probar que

$$F_X \text{ absolutamente continua} \iff P_X \ll \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.[2]

ii. Mostrar que si F_X es absolutamente continua entonces $F'_X = \frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$.[3]

iii. Mostrar que en ese caso si $g(X)$ es P-integrable, o no negativa, entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\, dx.$$

Ejercicio 4. Sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución [4].

a) Probar que existe una única probabilidad P_F sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que su función de distribución acumulada asociada coincide con F.

b) Deducir que en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_F)$ la función identidad es una variable aleatoria con función de distribución acumulada F.

c) Construir en el espacio $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}|_{[0,1]}\big)$ una variable aleatoria X tal que su función de distribución acumulada sea F.

d) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias tales que $F_{X_1} = F_{X_2}$. Probar que $P_{X_1} = P_{X_2}$.[5]

Ejercicio 5. Construir una variable aleatoria con función de distribución acumulada continua pero que no admita densidad.
Sugerencia. Considerar la función de Cantor-Lebesgue.

[2] Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua si lo es sobre cada intervalo acotado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

[3] Cuando X es absolutamente continua $\frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$ recibe el nombre de *función de densidad* de X.

[4] Una función $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ se dice de distribución si $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, es continua a derecha y es no decreciente.

[5] Esto muestra que para definir una distribución basta con dar su función de distribución acumulada.