Práctica 1: Construcción de medidas

"A mathematician is a device for turning coffee into theorems."
Paul Erdős

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es una *semiálgebra* cuando

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A, B \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$.

(c) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow \exists A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{D}$ disjuntos tales que $A^c = \cup_{i=1}^{k} A_i$

Ejercicio 1. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que la clase

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \Omega : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ con } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos} \right\}$$

es un álgebra de subconjuntos de Ω.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es un λ-*sistema* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ y $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Ejercicio 2. Verificar que la condición (b) en la definición de λ-sistema puede ser sustituida por la condición

$$(b') \;\; A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

Ejercicio 3. Probar que toda clase $\mathcal{C}$ que sea π-sistema y λ-sistema a la vez resulta una σ-álgebra.

Ejercicio 4.

a) Probar que en el Teorema de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida μ es σ-finita sobre $\mathcal{S}$ (μ es σ-finita sobre $\mathcal{S}$ si el espacio es unión numerable de conjuntos de $\mathcal{S}$ de medida finita).

b) Mostrar con un ejemplo que la extensión puede no ser única si μ no es σ-finita.
Sugerencia. Considere $\mathcal{S} = \{(a, b] : -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$ y la medida μ sobre $\mathcal{S}$ dada por

$$\mu(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = \emptyset \\ +\infty & \text{si } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definición. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{M}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{M}$ es una *clase monótona* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Ejercicio 5. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{A}$ una clase de subconjuntos de Ω.

a) Mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, siendo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la clase monótona generada por $\mathcal{A}$.

b) **Teorema de la clase monótona**. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Ejercicio 6. (Construcción de distribuciones vía Carathéodory-Hahn)
Sea $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ una *función de distribución acumulada* (es decir, una función monótona creciente, continua a derecha que además cumple que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$). Definimos la clase $\mathcal{S} = \{(a,b] : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$, y la aplicación $\mu_F : \mathcal{S} \to [0,1]$ dada por

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$$

para cada $-\infty \leq a \leq b < \infty$, donde notamos $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

a) Notar que μ_F se extiende a una función $\sigma-$aditiva sobre $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, definido como en el ejercicio 1.

b) Concluir que μ_F se extiende a una medida sobre $\beta(\mathcal{R})$.

c) ¿Cómo podemos construir la distribución de un vector aleatorio?

Ejercicio 7. (Construcción de medidas producto)
Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ espacios de probabilidad.
Definimos la clase $\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$, y la aplicación $\mathbb{P} : \mathcal{S} \to [0,1]$ dada por

$$\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \cdot \mathbb{P}_2(B)$$

para cada $A \times B \in \mathcal{S}$.

a) Notar que $\mathbb{P}$ se extiende a una función $\sigma-$aditiva sobre $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, definido como en el ejercicio 1.

b) Concluir que $\mathbb{P}$ se extiende a una medida sobre $\sigma(\mathcal{S})$.

c) *Para pensar:* En el caso que los espacios de probabilidad sean $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ para $\mathcal{L}$ la medida de Lebesgue: ¿coinciden $\sigma(\mathcal{S})$ y la sigma álgebra de medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^2$? [1]

[1] Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, su *completación* es $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ donde

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{A \cup Z : A \in \mathcal{F}, \exists B \supseteq Z \text{ tal que } \mathbb{P}(B) = 0\}$$

y $\tilde{P}$ es la extensión de $\mathbb{P}$ a $\tilde{\mathbb{P}}$ dada por $\tilde{\mathbb{P}}(A \cup Z) = \mathbb{P}(A)$ para cada $A \cup Z \in \tilde{\mathcal{F}}'$.