Práctica 6: Movimiento Browniano

Ejercicio 1. Escalamiento Browniano. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar, $a > 0$. Probar que $\left(\frac{1}{a}B_{a^2 t}\right)_{t\geq 0}$ es movimiento Browniano.

Ejercicio 2. Ley de los grandes números. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar. Entonces $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}B_t = 0$.

Ejercicio 3. Principio de reflexión. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ estándar, $a > 0$, $T_a = \inf\{t \geq 0,\, B_t = a\}$. Definimos

$$X_t = \begin{cases} 2a - B_t & \text{si } T_a \leq t, \\ B_t & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

1. Probar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es movimiento Browniano estándar.
2. Probar que $\mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a)$.
3. A partir del ítem anterior calcular la densidad de la variable aleatoria T_a y probar que tiene media infinita, $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{G}_\infty^B = \bigcap_{t\geq 0} \sigma(B_s : s \geq t)$ la σ-álgebra cola de B. Probar que $\mathcal{G}_\infty^B$ es trivial, i.e. para todo $A \in \mathcal{G}_\infty^B$ se tiene $P(B \in A) \in \{0, 1\}$.

Ejercicio 5. Probar que casi seguramente se tiene que

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Ejercicio 6. Probar que B es *puntualmente recurrente*, i.e.

$$P(B^{-1}(\{x\}) \text{ es no acotado para todo } x \in \mathbb{R}) = 1.$$

Ejercicio 7. Probar que $P(\max_{0\leq s\leq t} B_s \text{ se alcanza en un único punto}) = 1$ para todo $t \geq 0$. Deducir que casi seguramente cada valor extremo de B se alcanza una única vez.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ el conjunto de ceros de B.

1. Probar que $\mathcal{Z}$ es cerrado y casi seguramente no acotado.
2. Probar que casi seguramente $\mathcal{Z}$ tiene medida de Lebesgue nula.

   Sugerencia. Pruebe que $(t, \omega) \mapsto B_t(\omega)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{F}$-medible y luego que $|\mathcal{Z}|$ es una variable aleatoria. Calcule $\mathbb{E}(|\mathcal{Z}|)$ utilizando el Teorema de Fubini-Tonelli.
3. *a)* Para $t \geq 0$ sean los tiempos de parada

   $$R_t^{(1)} = \inf\{u \geq t : B_u = 0\} \qquad \text{y} \qquad R_t^{(2)} = \inf\{u > R_t^{(1)} : B_u = 0\}.$$

   Probar que $P(R_t^{(2)} = R_t^{(1)}) = 1$.

   b) Concluir que, salvo quizás por un evento de probabilidad nula, $\mathcal{Z}$ es perfecto, i.e. no tiene puntos aislados. Recordar que en tal caso $\mathcal{Z}$ resulta no numerable.