Matemática I (B)

Práctica 7 — Ecuaciones diferenciales de primer orden

Observación. *A lo largo de esta práctica, x será una función del tiempo t. Es decir, $x = x(t)$.*

Separación de variables

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x' = 3x$
b) $x' = x^2$
c) $xx' = t$
d) $tx' = x$
e) $x' = \frac{t+\operatorname{sen} t}{3x^2}$
f) $t^2x' + x = 0$
g) $e^{-x}x' + \cos t = 0$
h) $x' = 1 + t - x - tx$
i) $x' = x(1 - x)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas.

a) $xx' = t, \quad x(0) = -2, \quad x(0) = 3$
b) $t^2x' + x = 0, \quad x(1) = 1, \quad x(-1) = -1, \quad x(0) = 0$
c) $x' = x(1 - x), \quad x(0) = 2, \quad x(0) = \frac{1}{2}$
d) $x' = \frac{1}{tx}, \quad x(1) = -4, \quad x(-1) = 4$

En cada caso, determine el intervalo más grande en el que está definida la solución.

3. Consideramos una población cuya cantidad de habitantes viene dada por una función $N(t)$, donde t mide el tiempo en años. Se observa que la velocidad de cambio de $N(t)$ es directamente proporcional a $650 - N(t)$. Cuando $t = 0$ la población es de 300 individuos, y cuando $t = 2$ la población se incrementó a 500 individuos. Halle la población al cabo de 3 años.

4. Una de las leyes más comúnmente utilizadas para modelar el crecimiento de una población de tamaño $N(t)$ en función del tiempo t, en situaciones en las que el crecimiento está restringido por una cantidad limitada de recursos, es la *ecuación logística*, atribuida al matemático belga P. F. Verhulst:

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Aquí, r y K son constantes positivas que representan, respectivamente, la *habilidad de proliferación* de la población y la *capacidad de carga* del ambiente.

Observe que la ecuación indica que la tasa de crecimiento *per cápita* N'/N decrece a medida que la población aumenta.

a) Verifique que si denotamos $N_0 = N(0)$, se tiene

$$N(t) = \frac{K\,N_0\,e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Sugerencia: note que en el Ejercicio 1*i* resolvió este problema en el caso $r = K = 1$.

b) Verifique que $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$, si $N_0 > 0$.

c) Supongamos que la habilidad de proliferación es $r = \frac{1}{2}$, la capacidad de carga es $K = 10$, y la población inicial es $N_0 = 2$. Grafique la función N en este caso, e interprete el gráfico obtenido.

d) Supongamos que la capacidad de carga es $K = 5000$ y que la población incial es $N_0 = 100$. Si al cabo de 2 días el tamaño de la población es de 500 individuos, ¿en cuánto tiempo dicho tamaño será la mitad de la capacidad de carga?

5. Otra de las leyes comúnmente utilizadas para modelar el crecimiento de una población de tamaño $N(t)$ en función del tiempo t es la Ley de Gompertz:

$$N' = rN\,\ln\left(\tfrac{K}{N}\right),$$

basada en el principio de que la resistencia a morir de un individuo decrece a medida que aumenta su edad. Aquí, r y K son constantes positivas que como en el ejercicio anterior representan, respectivamente, la *habilidad de proliferación* de la población y la *capacidad de carga* del ambiente.

a) Halle la fórmula para $N(t)$, en términos de las constantes r y K, y del tamaño inicial de la población $N_0 = N(0)$.

b) Verifique que $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$.

c) Si la habilidad de proliferación y la capacidad de carga están dadas respectivamente por $r = \frac{1}{2}$ y $K = 100$, y el tamaño inicial de la población es $N_0 = 5$, ¿cuál será el tamaño de la población a tiempo $t = 3$?

6. Una laguna contiene 10^8 litros de agua. Es atravesada por un río cuyo caudal es de 300 litros por minuto. Se derrama accidentalmente un veneno en la laguna, resultando en una concentración de 35 partes de veneno por millón de litros de agua (PPM). A medida que el tiempo transcurre, el río va limpiando la laguna.

Denotemos por $V(t)$ a la función que mide la cantidad de veneno en función del tiempo t. En un período corto de tiempo Δt, podemos asumir que la concentración de veneno en la laguna es constante, y viene dada por $\frac{V}{10^8}$. El agua del río que entra *no* contiene veneno, por lo que la variación de la cantidad de veneno en ese período de tiempo está dada por

$$\Delta V = \left(0 - 300 \cdot \frac{V}{10^8}\right) \cdot \Delta t\,, \tag{1}$$

y por lo tanto V satisface la ecuación diferencial

$$V' = -300 \cdot \frac{V}{10^8}.$$

a) Halle la fórmula para $V(t)$.

b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la concentración sea menor a 1 PPM?

Ecuaciones lineales

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.

a) $x' + 5x = e^{5t}$

b) $e^t x' + 4e^t x = 1$

c) $x' = -2x + t, \quad x(0) = \frac{5}{4}$

d) $x' + x = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 1$

8. Un tanque contiene 1000 litros de agua pura. Una salmuera que contiene $0,02$kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 litros por minuto. Otra salmuera que contiene $0,04$kg de sal por litro de agua entra a razón de 10 litros por minuto. La solución se mantiene perfectamente mezclada, y sale del tanque a razón de 15 litros por minuto.

a) Siguiendo el razonamiento indicado en el Ejercicio 6, deduzca una ecuación diferencial lineal *no* homogénea[1] a coeficientes constantes para la cantidad de sal $S(t)$ a tiempo t.

b) Resuelva dicha ecuación, y determine la concentración de sal en el tanque al cabo de t minutos.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes variables.

a) $x' - \frac{5x}{t^2} = \frac{1}{t^2}$

b) $x' \cos t - x \operatorname{sen} t = \cos t$

c) $x' + \frac{5}{t}x = e^{t^6}, \quad x(1) = 1.$

d) $t^2 x' + 3tx = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \quad x(\pi) = 0.$

10. Un depósito de 200 litros está lleno hasta la mitad de agua destilada. Se comienza a verter en el depósito una solución de agua y sal de concentración $0,5$kg/l a un ritmo de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo se extrae la solución resultante (convenientemente agitada) a razón de 3 litros por minuto.

a) Siguiendo el razonamiento indicado en el Ejercicio 6, deduzca una ecuación diferencial lineal no homogénea a coeficientes *no* constantes para la cantidad de sal $S(t)$ a tiempo t.

b) Resuelva dicha ecuación, y determine la concentración de sal en el depósito en el instante en que se llene.

[1] En este caso el agua no entra pura, por lo que al plantear la igualdad análoga a (1), el "0" cambiará por una cantidad positiva.

Análisis asintótico

11. En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $x' = f(x)$, realice el gráfico de $f(x)$, halle los puntos de equilibrio y realice un bosquejo de la dinámica en el eje x. A partir de esto, analice la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por último, para cada equilibrio estable, determine las condiciones iniciales bajo las cuales la función $x(t)$ tiende al equilibrio cuando $t \to +\infty$.

a) $x' = x(1-x)$

b) $x' = \operatorname{sen} x$

c) $x' = x^3 - x$

d) $x' = (1-x)e^{x^2}$

12. Repita lo hecho en el ejercicio anterior para las ecuaciones

a) $x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$

b) $x' = rx \ln\left(\frac{K}{x}\right)$

Coteje el bosquejo de la dinámica con las fórmulas explícitas obtenidas en los Ejercicios 4 y 5.

13. En 1969, el ecólogo R. Levins introdujo el concepto de *metapoblación*, que hace referencia a un grupo de poblaciones de una misma especie que están separadas en el espacio y que interactúan a cierto nivel. Cada población ocupa una parcela, que estará ocupada o no dependiendo de la mortalidad y migración de las poblaciones, y también de la destrucción que se puede producir, volviéndola inhabitable para la especie. Si se denota con $p(t)$ a la fracción de parcelas que están ocupadas a tiempo t, la dinámica se puede describir como

$$p' = cp(1-p-D) - mp,$$

donde c es la *tasa de colonización*, D es la fracción de parcelas destruidas en forma permanente y m es la *tasa de mortalidad* de las poblaciones.

a) Muestre que hay dos equilibrios posibles: $p_1 = 0$ y $p_2 = 1 - D - \frac{m}{c}$. Note que, en este contexto, este último representará efectivamente un equilibrio si y solo si $0 < p_2 < 1$.

b) Suponga que $m < c$. Encuentre una condición sobre D para que $0 < p_2 < 1$, y estudie la estabilidad de ambos equilibrios bajo esa condición.

c) Bajo la condición que encontró en el ítem anterior, muestre que cuando el sistema está en equilibrio, la fracción de parcelas que están en condiciones de ser colonizadas (es decir, las vacantes y no destruidas) es independiente de D. Muestre que la *tasa de colonización efectiva en equilibrio*, es decir c veces la fracción de parcelas en condiciones de ser colonizadas, es igual a la tasa de mortalidad. Esta igualdad muestra que la tasa de nacimiento efectiva de colonias nuevas balancea su tasa de mortalidad en equilibrio.

14. Para algunas poblaciones cuyo número *crece* hacia un estado de equilibrio estable, el crecimiento se va desacelerando a medida que la población crece (por ejemplo, debido a la competencia por alimento). Análogamente, si el número *decrece* a un estado de equilibrio, el decrecimiento se va acelerando a medida que la población decrece (por ejemplo, debido a la dificultad para reproducirse).

Si se denota por $N(t)$ a la cantidad de individuos en tiempo t, dicho desaceleramiento (respectivamente, aceleramiento) se traduce en que $N''(t)$ es negativo (respectivamente, positivo) cuando $N(t)$ se acerca al estado de equilibrio.

Note que si N satisface una ecuación diferencial de la forma $N' = f(N)$, entonces $N'' = f'(N)\, f(N)$.

Para cada uno de los siguientes modelos, decida si hay (des)aceleramiento.

a) $N' = N(1 - N)$

b) $N' = N(N^2 - 1)$