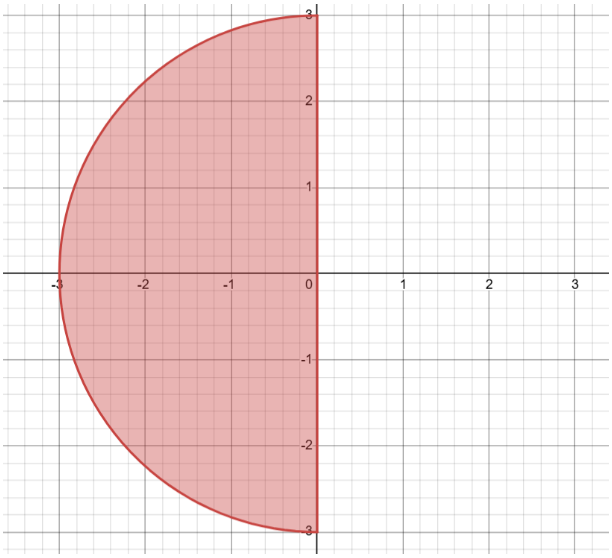
RESOLUCIÓN PARCIAL 2
TEMA 2

PRACTICA

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2.$$
Determine los extremos absolutos de f restringida a:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0\}.$$

Solución: En primer lugar grafiquemos la región A:



Dado que la región es cerrada y acotada entonces es compacta y como f es continua por el teorema de Weierstrass sabemos que f alcanza máximo y mínimo absoluto en la región.

Hay dos formas de hallar los puntos críticos de la función, mediante el método de multiplicadores de Lagrange (ojo se aplica Lagrange en ambas curvas la recta y la semicircunferencia), o parametrizando curvas. Aquí haremos uso de esta última.

Los candidatos a puntos críticos pueden encontrarse en

(1) Los "vértices": Son los puntos donde se cortan las curvas de las restricciones, en este caso es claro que es en $(0, 3)$ y $(0, -3)$.
(2) El interior: Para ello calculamos el gradiente de la función igualamos a cero y vemos si los puntos que anulan al gradiente caen o no dentro del interior de la región.
(3) Los lados: Parametrizamos ambos bordes y componemos con la función, obteniendo funciones de una variable a la cual derivamos e igualamos a cero para hallar el resto de los puntos críticos.

Busquemos puntos en el interior:
$$\nabla f(x, y) = (4x(x^2 - 4), 2y) = (0, 0)$$
De la primera condición $4x(x^2 - 4) = 0 \iff x = 0$ o $x = \pm 2$ y de la segunda condición $2y = 0$ entonces sabemos que $y = 0$. Los puntos que obtenemos aquí son $(0, 0); (2, 0); (-2, 0)$ y como estamos analizando el interior el único punto que cae dentro de la región (y no en el borde) es el $(-2, 0)$.

Candidatos a máximos y mínimos hasta ahora: $PC = \{(0,3),(0,-3),(-2,0)\}$. Ahora nos falta analizar en los bordes. Para ello proponemos las siguientes parametrizaciones, para la circunferencia podemos usar coordenadas polares o cartesianas (Despejando de forma inteligente):

CA: $x = \pm\sqrt{9-y^2}$ y como solo me interesan las $x \leq 0$ tomo la rama NEGATIVA.

Entonces, $\sigma_1(t) = (-\sqrt{9-t^2}, t)$ con $-3 \leq t \leq 3$ parametriza la media circunferencia izquierda y $\sigma_2(t) = (0,t)$ con $-3 \leq t \leq 3$ parametriza la recta $x = 0$.

Definimos $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h_1(t) = f \circ \sigma_1(t)$ y $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h_2(t) = f \circ \sigma_2(t)$. Luego $h_1(t) = ((9-t^2)-4)^2 + t^2 = (5-t^2)^2 + t^2$

$$h_1'(t) = 2(5-t^2)(-2t)+2t = 0 \text{ saco factor común -2t, } \implies (-2t)(10-2t^2-1) = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Evalúo para hallar los puntos: en $t = 0$ $(-3,0)$, en $t = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ y finalmente en $t = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$. Cada t vive en el intervalo definido $-3 \leq t \leq 3$ y todos los puntos viven en el el borde de la región, por lo tanto son candidatos a puntos críticos.

Veamos ahora en h_2. $h_2(t) = 16 + t^2$ entonces $h_2'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, evaluamos y obtenemos $(0,0)$ que cumple con el intervalo de t y estar en el borde de la región.

Así los puntos críticos son:

$$PC = \{(0,3),(0,-3),(-2,0),(-3,0),(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}),(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}),(0,0)\}$$

Finalmente para clasificarlos en máximos y mínimos evaluamos cada uno en la función $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} f(0,3) &= 25, \\ f(0,-3) &= 25, \\ f(-2,0) &= 0, \\ f(-3,0) &= 25, \\ f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{19}{4}, \\ f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{19}{4}, \\ f(0,0) &= 16. \end{aligned}$$

Finalmente en $(0,3),(3,0),(-3,0)$ tenemos máximos absolutos y en $(-2,0)$ mínimo absoluto.

Ejercicio 2 Resolver la siguiente ecuación diferencial con condición inicial en un entorno de $t = 1$:

$$\begin{cases} tx' + 4x &= sen(t^4) \\ x(1) &= 0. \end{cases}$$

Solución: Dado que la ecuación es una EDO no Homogénea entonces debemos hallar primero una solución de la ecuación homogénea. La ecuación homogénea es $x' = \frac{-4x}{t}$ entonces resolvemos:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{-4}{t}\,dt$$

Resolvemos ambos lados de las integrales:

$$ln|x| = -4ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Notar que los argumentos de ambos logaritmos tienen un modulo, y tambien que al presentar a la constante c, estamos diciendo a que conjunto pertenece.

Aplicamos exponencial en ambos lados y despejamos aplicando propiedades de exponentes:

$$|x(t)| = e^{-4ln|t|+c} = (e^{ln|t|})^{-4}.e^c = |t|^{-4}.c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

Notar que c_2 era el resultado de una exponencial, y por lo tanto solo puede tomar valores reales estrictamente positivos.

Dado que no conocemos el valor de la constante podemos quitar el módulo y asumir que el signo se lo llevará la constante:

$$x_h(t) = t^{-4}.k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ahora para hallar la solución de la ecuación no homogénea aplicamos el método de variación de las constantes, proponiendo una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = t^{-4}.k(t)$$

Como es solución, debe cumplir la EDO, es decir que al derivarla y reemplazarla en la ecuación original debe satisfacerse la igualdad.

$$x_p'(t) = -4.t^{-5}.k(t) + t^{-4}.k'(t)$$

Reemplazamos en la EDO:

$$t(-4.t^{-5}.k(t) + t^{-4}.k'(t)) + 4(t^{-4}.k(t)) = sen(t^4)$$
$$-4.t^{-4}.k(t) + t^{-3}.k'(t) + 4t^{-4}.k(t) = sen(t^4)$$

Se me simplifican los términos con $k(t)$ obteniendo que $t^{-3}.k'(t) = sen(t^4)$. Luego resolvemos la integral para hallar el valor de $k(t)$:

$$\int k'(t)\,dt = \int sen(t^4).t^3\,dt$$

Aplicando método de sustitución, tomando $u = t^4 \implies du = 4t^3dt$ es decir que $t^3dt = \frac{du}{4}$

$$\int sen(u)\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}(-cos(u))$$

Luego como $k(t) = -\frac{1}{4}cos(t^4)$ tenemos que la solución particular es de la forma:

$$x_p(t) = t^{-4}.(-\frac{1}{4}cos(t^4))$$

Y como la solución general del problema es $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ entonces

$$x(t) = t^{-4}.k + t^{-4}.(-\frac{1}{4}cos(t^4)), \quad k \in \mathbb{R}$$

Por último, como dato adicional nos dicen que $x(1) = 0$, con esta condición inicial podemos hallar el valor de la constante k.

$$0 = x(1) = 1^{-4}.k + 1^{-4}.(-\frac{1}{4}cos(1^4)) = k - \frac{1}{4}cos(1)$$

Por lo tanto $k = \frac{1}{4}cos(1)$. Así

$$x(t) = t^{-4}.\frac{1}{4}cos(1) + t^{-4}.(-\frac{1}{4}cos(t^4))$$

Ejercicio 3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= x + 6y, \\ y' &= 2x - 3y. \end{cases}$$

(1) Hallar la solución general del sistema.
(2) Hallar el conjunto de datos iniciales para los cuales la solución correspondiente tiende a $(0, 0)$ cuando $t \to \infty$.

Solución:

Para hallar la solución general del sistema debemos verificar que la matriz sea diagonalizable en $\mathbb{R}$, para ello nos basta con ver si a matriz asociada al sistema cuenta con dos autovalores distintos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característicos de A.

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 15$$

Luego de aplicar la fórmula resolvente obtenemos dos raíces reales del polinomio: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -5$. Hallamos los autovectores asiciados a cada autovalor.

Autovalor $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la primer ecuación obtenemos la siguiente relación $-2a + 6b = 0$ entonces $a = 3b$, con lo cual $v_1 = (3, 1)$.

Autovalor $\lambda_2 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la primer ecuación obtenemos la siguiente relación $6a + 6b = 0$ entonces $a = -b$, con lo cual $v_2 = (-1, 1)$.

Ahora podemos armar la solución del problema, sabiendo que la solución general es de la forma $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1.e^{\lambda_1 t}.v_1 + C_2.e^{\lambda_2 t}.v_2$.

Item a: Solución del sistema: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1.e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2.e^{-5t}. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Siendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Item b: Debemos calcular el límite cuando $t \to \infty$.

$$\lim_{t \to \infty} C_1.e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2.e^{-5t}. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como el término $e^{-5t} \to 0$ si $t \to \infty$ y $e^{3t} \to \infty$ si $t \to \infty$ entonces para que el límite sea igual a cero necesariamente $C_1 = 0$ y $C_2 \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos que para valores iniciales la solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = C_2.e^{-5.(0)}. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que el conjunto de soluciones iniciales debe cumplir que $x(0) = -C_2$ y $y(0) = C_2$, es decir $x(0) = -y(0)$ entonces basta con tomar soluciones iniciales de la forma $(x(0), y(0)) = (x(0), -x(0))$, con $x(0) \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 Consideremos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x' &= (x-1)(1-y-x) \\ y' &= (y+1)(-2y+x). \end{cases}$$

Hallar los puntos de equilibrio con primera coordenada mayor o igual a 1 y analizar, de ser posible, la estabilidad de cada uno. Esbozar el diagrama de fases correspondiente alrededor de cada punto de equilibrio.

Solución: Para poder resolver este sistema no lineal haremos uso de la teoría de linealización.

Para ello definimos $F(x,y) = ((x-1)(1-y-x), (y+1)(-2y+x)) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ de tal forma que $F(x,y) = (x', y')$. Buscamos los puntos de equilibrio del sistema, los cuales son las raíces de $F(x,y)$.

$$\begin{cases} 0 &= (x-1)(1-y-x) \\ 0 &= (y+1)(-2y+x). \end{cases}$$

De la primer ecuación podemos ver que $0 = (x-1)(1-y-x) \iff x = 1 \vee x = 1-y$. Y para la segunda ecuación $0 = (y+1)(-2y+x) \iff y = -1 \vee x = 2y$. (OJO en donde reemplazan las cosas!!).

Si $x = 1$ entonces en la segunda ecuación tenemos que $0 = (y+1)(-2y+1) \iff y = -1 \vee y = \frac{1}{2}$ es decir $\{(1,-1), (1, \frac{1}{2})\}$.

Si $x = 1-y$ en la segunda ecuación $0 = (y+1)(-2y+1-y) = (y+1)(-3y+1) \iff y = -1 \vee y = \frac{1}{3}$ y por lo tanto $x = 1-(-1) = 2$ y $x = 1 - 1/3 = \frac{2}{3}$, obteniendo $\{(2,-1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$.

Ahora si $y = -1$ en la primer ecuación $0 = (x-1)(1-(-1)-x) = (x-1)(2-x) \iff x = 1 \vee x = 2$, es decir $\{(1,-1), (2,-1)\}$ notemos que hay puntos que se repiten.

Finalmente si $x = 2y$ en la primer ecuación tenemos que $0 = (2y-1)(1-y-2y) = (2y-1)(1-3y) \iff y = \frac{1}{2} \vee y = \frac{1}{3}$ y por lo tanto $x = 1$ $x = \frac{2}{3}$, obteniendo así $\{(1, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$.

Así obtenemos en total 4 puntos de equilibrio $\{(1,-1), (1, \frac{1}{2}), (2,-1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ de los cuales como dice el enunciado solo me interesan los que tienen coordenada $x \geq 1$.

Ahora construimos la matriz diferencial que nos servirá en el armado del sistema lineal

$$\mathbf{DF(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Calculemos entonces cada derivada por separado:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big((x-1)(1-y-x)\big) = (1-y-x) + (x-1)(-1) = 1-y-x-x+1 = 2-y-2x.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big((x-1)(1-y-x)\big) = (x-1)(-1) = -x+1.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big((y+1)(-2y+x)\big) = (y+1)(1) = y+1.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big((y+1)(-2y+x)\big) = (-2y+x)+(y+1)(-2) = -2y+x-2y-2 = x-4y-2.$$

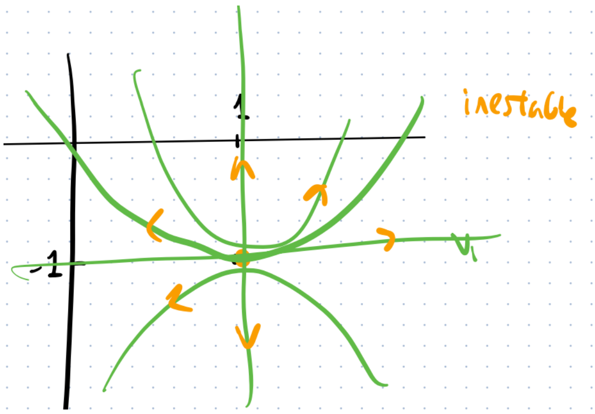
Finalmente tenemos que la matriz queda $DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2-y-2x & -x+1 \\ y+1 & x-4y-2 \end{pmatrix}$

Evaluamos $DF(x,y)$ en cada punto de equilibrio:

$$DF(1,-1) = \begin{pmatrix} 2-(-1)-2(1) & -(1-1) \\ -1+1 & 1-4(-1)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Notemos que esta matriz tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$ por lo tanto es una matriz diferenciable y por el teorema de estabilidad lineal el sistema no lineal en un entorno al $(1,-1)$ se comporta de forma similar al sistema $X' = DF(1,-1).X$ y como los autovalores son ambos positivos en el sistema lineal sabemos que es un punto de equilibrio inestable cuyas soluciones cercanas tienen un comportamiento parabólico (son parábolas) apoyadas sobre el autovalor con menor módulo y el sentido de las flechas será hacia afuera del punto de equilibrio.

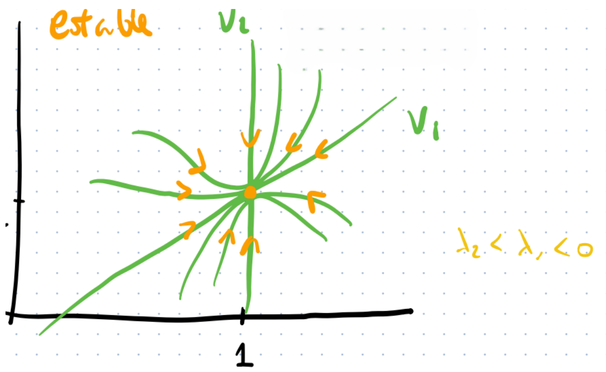
Primero debemos hallar los autovectores asociados a cada autovalor, como ya sabemos calcularlos saltaremos este paso y escribiremos su forma directamente, $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$



$$DF\left(1,\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{2}-2(1) & -(1-1) \\ \frac{1}{2}+1 & 1-4\left(\frac{1}{2}\right)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que esta matriz tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = -3$. Por lo tanto de forma análoga al caso anterior, la matriz es diferenciable y por el teorema de estabilidad lineal, el sistema no lineal en un entorno al $(1,\frac{1}{2})$ se comporta de forma similar al sistema $X' = DF(1,\frac{1}{2}).X$ y como los autovalores son ambos negativos en el sistema lineal sabemos que es un punto de equilibrio estable y las soluciones cercanas tienen un comportamiento parabólico (son parábolas) apoyadas sobre el autovalor con menor módulo, además el sentido de las flechas será hacia adentro del punto de equilibrio.

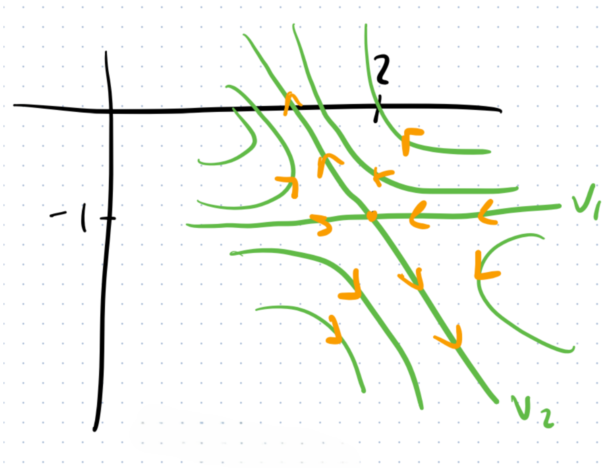
Los autovectores asociados son $v_1 = (1,\frac{3}{5})$ y $v_2 = (0,1)$



$$DF(2,-1) = \begin{pmatrix} 2-(-1)-2(2) & -(2-1) \\ -1+1 & 2-4(-1)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aquí la matriz tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto de forma análoga a los casos anteriores, la matriz es diferenciable y por el teorema de estabilidad lineal, el sistema no lineal en un entorno al $(1, \frac{1}{2})$ se comporta de forma similar al sistema $X' = DF(2,-1).X$ y como los autovalores tienen signos distintos en el sistema lineal sabemos que es un punto de equilibrio no estable, es un punto silla y las soluciones cercanas tienen un comportamiento hiperbólico (son hipérbolas) en donde el sentido de las flechas será hacia adentro para el autovalor negativo y hacia afuera para el positivo en un entorno al punto de equilibrio.

Los autovectores asociados son $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (1,-5)$



NOTAR QUE LOS DIAGRAMAS SE CENTRAN EN EL PUNTO DE EQUILIBRIO NO EN EL (0,0) Y SE GRAFICAN SUS EJES (LOS AUTOVECTORES) CON CENTRO EN EL PE.

En los graficos, los ejes NEGROS son x (el horizontal) e y (el vertical). Las rectas verdes que pasan por el punto de equilibrio (naranja) tienen la direccion de los autovectores, parados sobre el PE.