RESOLUCIÓN PARCIAL 1
TEMA 2

PRACTICA

Ejercicio 1 Expresar en forma exponencial al número complejo

$$z = (-1-i)^8.(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{-4}$$

Solución:
Buscamos cada termino en su forma exponencial, luego le aplicamos la potencia y finalmente multiplicamos.

$(-1-i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi})^8 = 16e^{i10\pi} = 16$

$(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{-4} = (e^{i\frac{5}{6}\pi})^{-4} = (e^{-i\frac{10}{3}})$

$z = (16e^{i10\pi}.e^{-i\frac{10}{3}\pi}) = 16.e^{-i\frac{10}{3}\pi}$

Notar que, dada la $2\pi i$ periodicidad de la exponencial, cualquier solucion de la forma

$$16.e^{-i\frac{10}{3}\pi+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$$

Es valida. En particular, la solucion

$$16.e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Donde el argumento esta en el intervalo del Argumento principal, osea $(-\pi, \pi]$.

Ejercicio 2 Se tienen dos regiones entre las cuales circula una cierta población. La dinámica conocida es la siguiente: cada año el 20% de la población de la región A se traslada a la región B y el resto permanece en A. A su vez, la mitad de la población de B se desplaza hacia A y el resto permanece en B.

a) Hallar los estados de equilibrio del sistema.
b) Si comenzamos con una distribución inicial de 200mil habitantes en A y 150mil habitantes en B, ¿existe un estado límite? En caso afirmativo, ¿cuál es el estado límite?

Solución:
Item a: Representamos el sistema de la siguiente forma:
$P_A(t)$ = Población de A en tiempo t
$P_B(t)$ = Población de B en tiempo t

$$\begin{cases} P_A(t+1) &= \frac{4}{5}P_A(t) + \frac{1}{2}P_B(t) \\ P_B(t+1) &= \frac{1}{5}P_A(t) + \frac{1}{2}P_B(t) \end{cases}$$

En forma Matricial:

$$\begin{pmatrix} P_A(t+1) \\ \\ P_B(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P_A(t) \\ \\ P_B(t) \end{pmatrix}$$

Calculamos las raíces del polinomio característico:

$$det \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda).(\frac{4}{5} - \lambda) - \frac{1}{10} = \lambda^2 - \frac{13}{10}\lambda + \frac{3}{10} = 0$$

Luego las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{3}{10}$. Los estados de equilibrio se encuentran donde el autovalor es igual a 1, por lo tanto debemos hallar su autovector asociado.

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la primer ecuación obtenemos la siguiente relación: $\frac{-1}{5}a + \frac{1}{2}b = 0 \Longrightarrow b = \frac{2}{5}a$ por lo tanto el autovector asociado al autovalor 1 es $v_1 = (1, \frac{2}{5})$ Luego los estados de equilibrio del sistema se encuentran en $\alpha.(1, \frac{2}{5})$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Item b: Sabemos que , si M es la matriz del sistema y $P(0) = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ la poblacion inicial (medido en miles de habitantes), tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} M^n.P(0) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_1^n.a.v_1 + \lambda_2^n.b.v_2)$$

Siendo $a, b \in \mathbb{R}$ los coeficientes que cumplen que $\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = a.v_1 + b.v_2$.

A v_1 ya lo calculamos en el item anterior, nos faltaria calcular v_2, el autovector asociado a $\lambda_2 = \frac{3}{10}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la ecuación 1 obtenemos la siguiente relación: $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \Longrightarrow b = -a$ por lo tanto el autovector asociado al autovalor $\frac{3}{10}$ es $v_2 = (1, -1)$. Hallar ahora los valores de a y b como:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = a.v_1 + b.v_2 = \begin{pmatrix} a + b \\ \frac{2}{5}a - b \end{pmatrix}$$

Luego $a = 200 - b$ y reemplazando en la segunda relación tenemos que $150 = \frac{2}{5}(200 - b) - b = 80 - \frac{7}{5}b \Longrightarrow b = -50$ y $a = 250$.

Finalmente $\lim_{n\to\infty} (\lambda_1^n.a.v_1 + \lambda_2^n.b.v_2) = \lim_{n\to\infty} (1^n.250 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + (\frac{3}{10})^n.(-50) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Así el estado límite comenzando con la población inicial pedida es $\begin{pmatrix} 250 \\ 100 \end{pmatrix}$ (medido en miles de habitantes).

Ejercicio 3 En un tejido biológico, la temperatura en el punto del espacio (x, y, z) está dada por la función:

$$T(x, y, z) = 6e^{-\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{2}{7}z^2}.$$

(1) Dada la posición $P = (-1, 0, 1)$ determine la tasa de cambio de la temperatura en el punto P en la dirección dada por el vector $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$. ¿La temperatura aumenta o disminuye en esta dirección?
(2) Encontrar la dirección en la cual la temperatura en el tejido aumenta más rápidamente en el punto P.

Solución:
Item a:
Como la tasa de cambio de la temperatura en el punto P es $\frac{\partial T}{\partial v} = \nabla T(P).\frac{v}{||v||}$ debemos hallar primero el gradiente de T.

El gradiente de T se define como:

$$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

1. Derivada parcial respecto a x:
$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{12}{7}x \cdot e^{-\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{2}{7}z^2}.$$
2. Derivada parcial respecto a y:
$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{3}{2}y \cdot e^{-\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{2}{7}z^2}.$$
3. Derivada parcial respecto a z:
$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{24}{7}z \cdot e^{-\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{2}{7}z^2}.$$

Así $\nabla T(-1,0,1) = (\frac{12}{7}.e^{-\frac{3}{7}}, 0, \frac{-24}{7}.e^{-\frac{3}{7}})$, finalmente

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{(\frac{12}{7}.e^{-\frac{3}{7}}, 0, \frac{-24}{7}.e^{-\frac{3}{7}}).(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = (-\frac{12e^{-\frac{3}{7}}}{7\sqrt{3}}) < 0$$

Por lo tanto la temperatura en esa dirección decrece.

Item b:

Como la dirección de máximo crecimiento es la del gradiente basta evaluar el gradiente en el punto solicitada, esto lo hicimos en el item anterior: $\nabla T(-1,0,1) = (\frac{12}{7}.e^{-\frac{3}{7}}, 0, \frac{-24}{7}.e^{-\frac{3}{7}})$.

(Notar que no es necesario normalizar dicho vector).

Ejercicio 4 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuyo polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 3$ es igual a

$$P_g(x) = 3x^3 + 5x^2 - 20x + 16.$$

Hallar el polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en $x_0 = 1$, donde f es la siguiente función:

$$f(x) = -2g(x^2+2) + 4g'(x^2+2) + 4x.$$

Solución:

Como el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $x_0 = 1$ es de la forma:

$$P_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

debemos hallar cada término desconocido. Sabiendo que $x_0 = 1$, podemos escribirlo como:

$$P_f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

Notemos que:

$f(x) = -2g(x^2+2) + 4g'(x^2+2) + 4x$

$f'(x) = -2.g'(x^2+2).2x + 4.g''(x^2+2)2x + 4$ $f'(x) = -4x.g'(x^2+2) + 8x.g''(x^2+2) + 4$

$f''(x) = -4.g'(x^2+2) - 4x.g''(x^2+2).2x + 8.g''(x^2+2) + 8x.g'''(x^2+2).2x$

$f''(x) = -4.g'(x^2+2) - 8x^2.g''(x^2+2) + 8.g''(x^2+2) + 16x^2.g'''(x^2+2)$

Evaluamos donde corresponde:

$f(1) = -2g(3) + 4g'(3) + 4$

$f'(1) = -4.g'(3) + 8.g''(3) + 4$

$f''(1) = -4.g'(3) - 8.g''(3) + 8.g''(3) + 16.g'''(3)$

Ahora como $P_g(x)$ es el polinomio de Taylor de g de orden 3 centrado en 3 sabemos que:

$$P_g(3) = g(3)$$
$$P_g'(3) = g'(3)$$
$$P_g''(3) = g''(3)$$
$$P_g'''(3) = g'''(3)$$

Por lo tanto basta hallar las primeras 3 derivadas del polinomio $P_g(x)$ para completar el polinomio de f.

$$P_g(3) = g(3) = 82$$
$$P_g'(x) = 9x^2 + 10x - 20 \longrightarrow P_g'(3) = g'(3) = 91$$
$$P_g''(x) = 18x + 10 \longrightarrow P_g''(3) = g''(3) = 64$$
$$P_g'''(x) = 18 \longrightarrow P_g'''(3) = g'''(3) = 18$$

Luego podemos reemplazar en las ecuaciones de f y sus derivadas dando como resultado:

$f(1) = 204$

$f'(1) = 152$

$f''(1) = -76$

Finalmente el polinomio solicitado queda de la siguiente forma:

$$P_f(x) = 204 + 152(x-1) - \frac{76}{2}(x-1)^2$$