Cálculo de Integrales Impropias

M. del C. Calvo

Veamos unos resultados que simplificarán cálculos posteriores.

Proposición 1

Sean A el conjunto dado por: $|z| > R_0 > 0$, $\varphi_1 \leq \arg(z) \leq \varphi_2$ con $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ y $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $\varphi_1 \leq t \leq \varphi_2$, $R > R_0$. Si f es holomorfa en A y $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in A}} zf(z) = 0$, entonces:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Demostración:

$$\text{Como } \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in A}} zf(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{z\in Im(\gamma_R)} |zf(z)| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Y, en particular, f está acotada sobre γ_R. Luego,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(Re^{it})Rie^{it}dt\right| \leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left|f(Re^{it})R\right| dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left|Re^{it}f(Re^{it})\right| dt$$

$$\leq (\varphi_2 - \varphi_1) \max_{z\in \mathrm{Im}(\gamma_R)} |zf(z)| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposición 2

Sean $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < r_0 \ , \ \varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2 \ , \ 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi\}$ y $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\varphi_1 \leq t \leq \varphi_2$, $0 < r < r_0$. Si f es holomorfa en A y $\lim\limits_{r\to 0} zf(z) = 0$, entonces:

(1)
$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Demostración:

Análoga a la anterior.

Proposición 3

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \ \ / \ Im(z) \geq 0\}$ *y* $z_1, \ldots, z_n \in A - \mathbb{R}$. *Entonces, si* f *es holomorfa en* $A - \{z_1, \ldots, z_n\}$ *y* $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ Im(z) \geq 0}} zf(z) = 0$

$$\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

Demostración:

La idea será encontrar un recinto donde –para f– valga el teorema de los residuos y tal que sobre una parte de su frontera obtengamos la integral que queremos calcular y sobre el resto sea relativamente fácil ver qué sucede.

Llamemos Γ_R al borde del semicírculo $|z| = R$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, orientado en sentido positivo, con R suficientemente grande como para que contenga a todos los z_i. Esta curva cerrada está compuesta por las curvas $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ y $L_R(t) = t$, $-R \leq t \leq R$, ambas recorridas en sentido positivo.

Es claro que $\int_{L_R} f(z)dz$ converge a la integral que queremos calcular. Con respecto a la integral sobre γ_R, se cumplen las hipótesis de la Proposición 1 para $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = \pi$. Luego, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Por otro lado, por el teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in \overset{\circ}{\Gamma}_R} \mathrm{Res}(f, a) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

debido a la hipótesis sobre R.

Entonces,

$$(2) \qquad \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) \ - \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

Lo que prueba que

$$\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

Observación:

$\star$ Si f es una función racional, con el grado del denominador superior en por lo menos 2 unidades al grado del numerador, es integrable sobre $\mathbb{R}$ y por lo tanto el resultado anterior nos da el valor de la integral, no sólo del valor principal.

$\star$ Si f no cumple la condición $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ Im(z)\geq 0}} zf(z) = 0$ pero sí satisface $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ Im(z)\leq 0}} zf(z) = 0$ y tiene finitas singularidades (ninguna de ellas real) en $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, una demostración totalmente similar prueba que:

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; -\,2\pi i \sum_{Im(a)<0} \mathrm{Res}(f,a)$$

Ejemplo: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

- $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{1+z^4} = 0$
- f es integrable sobre $\mathbb{R}$
- Singularidades de f: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. En $\mathrm{Im}(z) \geq 0$: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim\limits_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) = \dfrac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)z_1-z_4)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}i$
- $\mathrm{Res}(f,z_2) = \lim\limits_{z\to z_2} (z-z_2)f(z) = \dfrac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)z_2-z_4)} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}i$

Por lo tanto, la Proposición 3 nos permite asegurar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

De manera similar a lo hecho anteriormente se prueba la siguiente generalización de la Proposición 3

Proposición 4

Sean $A = \{z \in \mathbb{C} \;/\; Im(z) \geq 0\}$, $(z_n) \subset A - \mathbb{R}$ *y* f *holomorfa en* $A - \{z_n / n \in \mathbb{N}\}$. *Supongamos que existe una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos*

(r_n) *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, $|z_m| \neq r_j$ *para todo* $n, j \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz = 0$, *donde* $\gamma_n(t) = r_n e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. *Entonces:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Res}(f, z_n)$$

Proposición 5

Sean $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) \geq 0\}$, $z_1, \ldots, z_n \in A - \mathbb{R}$ *y* f *una función holomorfa en* $A - \{z_1, \ldots, z_n\}$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- $\diamond$ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ Im(z)\geq 0}} f(z) = 0$
- $\diamond$ $f(x)e^{imx}$ *(*$m > 0$*) es integrable sobre* $\mathbb{R}$.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)e^{imz}, z_k)$$

Demostración:

Llamemos $F(z) = f(z)e^{imz}$ y tomemos $R > 0$ de modo que todas las singularidades de f estén en $|z| < R$. Con las notaciones de la Proposición 3, podemos escribir

$$\int_{L_R} F(z)dz \ + \int_{\gamma_R} F(z)dz = \int_{\Gamma_R} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k)$$

Parametrizando las curvas obtenemos

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k) \ - \ \int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{imRe^{it}} Rie^{it}dt$$

Todo quedará probado si vemos que la integral del segundo miembro tiende a cero. Acotemos su módulo

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{imRe^{it}} Rie^{it}dt\right| &\leq \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{imR\cos t - mR\operatorname{sen} t} Rie^{it}dt\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} R|f(Re^{it})|e^{-mR\operatorname{sen} t}dt \qquad (3) \\
&\leq RM(R)\int_0^{\pi} e^{-mR\operatorname{sen} t}dt
\end{aligned}$$

donde $M(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$

Analicemos $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-mR\mathrm{sen}t}dt$. Separando el intervalo de integración en $[0,\pi/2]$ y $[\pi/2,\pi]$ y haciendo el cambio de variable $s=\pi-t$ en la segunda se ve que ambas son iguales y en consecuencia

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{imRe^{it}}Rie^{it}dt\right| \leq 2M(R)\int_0^{\pi/2} e^{-mR\mathrm{sen}t}dt$$

Pero en $(0,\pi/2)$ es: $\mathrm{sen}t \geq \frac{2}{\pi}.t$. Por lo tanto, $e^{-mR\mathrm{sen}t} \leq e^{-2mRt/\pi}$ y entonces

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{imRe^{it}}Rie^{it}dt\right| \leq 2RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-2mRt/\pi}dt = 2RM(R)\left.\frac{-\pi e^{-2mRt/\pi}}{2mR}\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{m}(1-e^{-mR})M(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ya que $\lim\limits_{R\to\infty} e^{-mR} = 0$ y $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$ debido a las hipótesis sobre f.

Proposición 6

Si f tiene un polo simple en $z=a$ y $\gamma_r(t) = re^{it}+a$ con $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ y $r>0$, entonces

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} (\theta_2-\theta_1)i\mathrm{Res}(f,a)$$

Demostración:

Por tener un polo simple en a , f se puede escribir en la forma:

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + g(z)$$

con $\alpha = \mathrm{Res}(f,a)$ y g holomorfa en a. Se deduce que para $0<r<r_0$ existe $M>0$ tal que $|g(z)| \leq M$ en $|z-a|<r_0$ y por lo tanto

$$\left|\int_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leq (\theta_2-\theta_1)rM \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma_r} \frac{\alpha}{z}dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\alpha ire^{it}}{re^{it}}dt = (\theta_2-\theta_1)\alpha i$$

Finalmente

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \;=\; \int_{\gamma_r} \frac{\alpha}{z}dz + \int_{\gamma_r} g(z)dz \;\; \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \;\; (\theta_2-\theta_1)i\mathrm{Res}(f,a)$$

Proposición 7

Sean $A=\{z\in\mathbb{C}\ /\ Im(z)\geq 0\}$, $z_1,\ldots,z_n\in A-\mathbb{R}$ *y* f *una función holomorfa en* $A-\{z_1,\ldots,z_n,0\}$ *que satisface las siguientes condiciones:*

- ◇ f *tiene un polo simple en* $z=0$
- ◇ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty\\ Im(z)\geq 0}} f(z)=0$
- ◇ $f(x)sen(mx)$ $(m>0)$ *es integrable sobre* $\mathbb{R}$.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{sen}(mx)dx = \mathrm{Im}\left\{\pi i\mathrm{Res}(f(z)e^{imz},0)+2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)e^{imz},z_k)\right\}$$

Demostración:

Llamemos $F(z)=f(z)e^{imz}$ y tomemos $R_0>r_0>0$ de modo que todas las singularidades de f en $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ estén en $r_0<|z|<R_0$. Sean $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $\gamma_r(t)=re^{it}$, $0\leq t\leq\pi$, $L^1_{r,R}(t)=t$, $-R\leq t\leq -r$, $L^2_{r,R}(t)=t$, $r\leq t\leq R$, $r_0<r<R<R_0$. Si llamamos $\Gamma_{r,R}$ al borde del semianillo (orientado positivamente) determinado por las curvas anteriores, se tiene

$$\int_{L^1_{r,R}} F(z)dz+\int_{\gamma_r^-}F(z)dz+\int_{L^2_{r,R}}F(z)dz+\int_{\gamma_R^+}F(z)dz=\int_{\Gamma_{r,R}}F(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,z_k)$$

Usando propiedades anteriores se ve que las integrales sobre γ_r y Γ_R satisfacen

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r^-}F(z)dz=-\pi i\mathrm{Res}(F,0) \qquad\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+}F(z)dz=0$$

mientras que las integrales sobre los segmentos convergen a

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx=\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{cos}(mx)dx+i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{sen}(mx)dx$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{sen}(mx)dx = \mathrm{Im}\left\{\pi i\mathrm{Res}(f(z)e^{imz},0)+2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)e^{imz},z_k)\right\}$$

Ejemplo: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)\text{sen}x}{x(x^2+1)}dx$$

- $f(z) = \dfrac{(z^2-1)}{z(z^2+1)}$, $F(z) = \dfrac{(z^2-1)e^{iz}}{z(z^2+1)}$
- $f(x)\text{sen}x$ es integrable sobre $\mathbb{R}$
- Singularidades de f: 0 , $\pm i$. En $\text{Im}(z) > 0$: $z_1 = i$
- $\text{Res}(F, z_1) = \lim\limits_{z\to z_1} (z - z_1)F(z) = e^{-1}$
- $\text{Res}(F, 0) = \lim\limits_{z\to 0} zF(z) = -1$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)\text{sen}x}{x(x^2+1)}dx = \text{Im}\left(-\pi i + \frac{2\pi i}{e}\right) = \pi\,(2/e - 1)$$

TIPO 1: $$\int_0^{2\pi} \frac{P(\text{cos}t, \text{sen}t)}{Q(\text{cos}t, \text{sen}t)}dt \text{ , } P, Q \text{ polinomios , } Q \neq 0.$$

Idea: expresar esta integral como $\int_\gamma F(z)dz$ y usar el teorema de los residuos.

En principio, si $z = e^{it} = \text{cos}t + i\text{sen}t$ se tiene: $z^{-1} = e^{-it} = \text{cos}t - i\text{sen}t$ y de aquí

$$\text{cos}t = \frac{z + z^{-1}}{2} \qquad \text{sen}t = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

Tomemos $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Luego,

$$\int_\gamma F(z)dz = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} F(e^{it})ie^{it}dt$$

Definamos $F(z) = \dfrac{P\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}{Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} \cdot \dfrac{1}{z}$. De esta forma,

$$\int_{\gamma^+} F(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{P(\text{cos}t, \text{sen}t)}{Q(\text{cos}t, \text{sen}t)}.\frac{1}{e^{it}}.i.e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} \frac{P(\text{cos}t, \text{sen}t)}{Q(\text{cos}t, \text{sen}t)}dt$$

Luego,

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\text{cos}t, \text{sen}t)}{Q(\text{cos}t, \text{sen}t)}dt = -i\int_{\gamma^+} F(z)dz = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \text{Res}(F, z_k)$$

i.e.,

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\mathrm{cos}t, \mathrm{sen}t)}{Q(\mathrm{cos}t, \mathrm{sen}t)} dt = 2\pi \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}(F, z_k)$$

Ejemplo: $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\mathrm{cos}t}$$

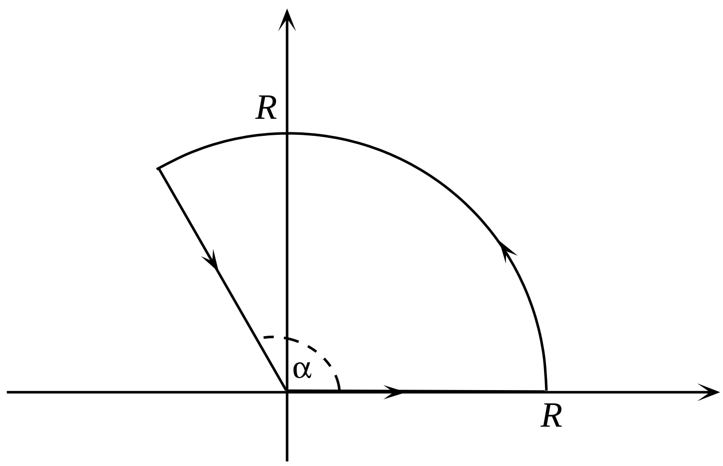
Estamos en el caso anterior pues $2 + \mathrm{cos}t \neq 0$ para todo t. La función F está dada por: $F(z) = \dfrac{1}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{z^2+4z+1}$. Las únicas singularidades de F son las raíces del denominador: $z_1 = -2+\sqrt{3}$ y $z_2 = -2-\sqrt{3}$. Dentro de γ sólo está z_1. Como z_1 es un polo simple, $\mathrm{Res}(F, z_1) = \lim\limits_{z\to z_1} (z-z_1)F(z) = \dfrac{2}{z_1 - z_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\mathrm{cos}t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

TIPO 2: $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n+1}} dx$$

Consideremos el siguiente recinto $\mathcal{A}$:



donde α es un ángulo entre 0 y 2π que veremos luego cómo nos conviene tomarlo y $R > 1$, para asegurarnos de que no haya singularidades del integrando en el exterior del sector circular.

Si llamamos Γ_R al borde de $\mathcal{A}$ orientado positivamente, el teorema de los residuos nos garantiza que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathcal{A}} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n+1}}, a\right)$$

Parametrizando el borde del recinto obtenemos

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n+1}} + \int_0^\alpha \frac{iRe^{it}}{1+R^{2n+1}e^{i(2n+1)t}}dt - \int_0^R \frac{e^{i\alpha}}{1+t^{2n+1}e^{i(2n+1)\alpha}}dt$$
$$= 2\pi i \sum_{a\in\mathcal{A}} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n+1}}, a\right)$$

Es claro que la primera integral converge a la que queremos calcular y, por una proposición anterior, la segunda tiende a cero. Con respecto a la tercera, observemos que nos convendría que $e^{i(2n+1)\alpha}$ fuera 1. Pero esto es decir que α debería ser $\dfrac{2\pi}{2n+1}$. Luego, ésta es la condición que buscábamos sobre α.

Tomemos entonces $\alpha = \dfrac{2\pi}{2n+1}$. Ahora, la tercera integral es: $-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}\displaystyle\int_0^R \frac{1}{1+t^{2n+1}}dt$. Y por lo tanto resulta

$$(1-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}})\int_0^R dx 1+x^{2n+1} = 2\pi i \sum_{a\in\mathcal{A}} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n+1}}, a\right)$$

Sólo nos resta ver cuántas raíces de $z^{2n+1}+1=0$ caen dentro de $\mathcal{A}$. Pero estas raíces son de la forma: $z_k = e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}$. Luego, dentro de $\mathcal{A}$, sólo hay una: $a = e^{\frac{i\pi}{2n+1}}$. De modo entonces que

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n+1}} = \frac{2\pi i}{1-e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}}\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n+1}}, e^{\frac{i\pi}{2n+1}}\right)$$

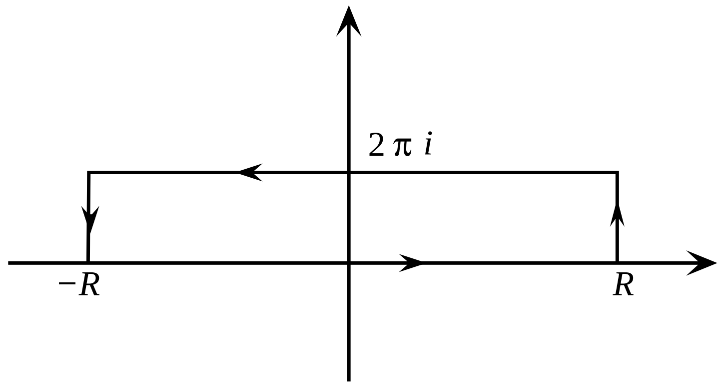
Tomando límite para $R\to\infty$ y haciendo cuentas se obtiene finalmente

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n+1}} = \frac{\pi}{(2n+1)\text{sen}(\pi/(2n+1))}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

TIPO 3: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \ , \ 0 < a < 1$

La condición sobre a hace que esta integral converja.
Tomemos como recinto el rectángulo de la figura y llamemos Γ_R al borde, orientado positivamente.



Aplicando el teorema de los residuos, parametrizando el borde y verificando que la única singularidad del integrando dentro de este recinto es un polo simple en $z = \pi i$, tenemos que

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \ + \ \int_0^{2\pi i} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}idt \ + \ \int_R^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}dt$$
$$+ \ \int_{2\pi i}^{0} \frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}idt \ = \ 2\pi i \ \mathrm{Res}\left(\frac{e^{az}}{1+e^z}, \pi i\right) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

Evidentemente la primera integral converge a la que estamos tratando de calcular y la tercera es un múltiplo de la primera pues

$$\int_R^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}dt = -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1+e^t}dt$$

Luego, sólo tenemos que ocuparnos de estudiar qué pasa con la segunda y la cuarta.
Con respecto a la segunda

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}idt\right| \leq \int_0^{2\mathbf{p}i} \frac{e^{aR}}{|e^{R+it}+1|}dt \underset{\substack{\uparrow \\ R\to\infty \Rightarrow R>0}}{\leq} \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}dt = 2\pi\frac{e^{aR}}{e^R-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

por ser $0 < a < 1$.

Una acotación análoga muestra que la cuarta integral también tiende a cero.

Finalmente obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}$$

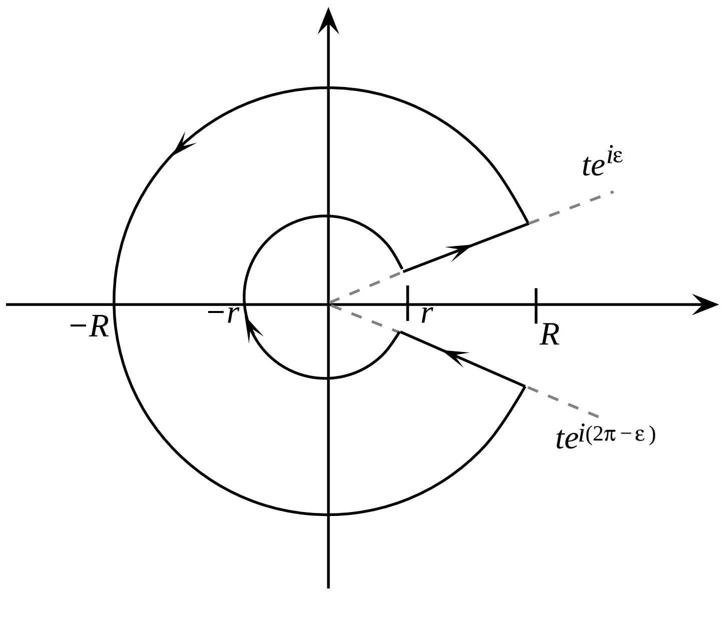
TIPO 4: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} dx$

con: $0 < \alpha < 1$ y f una función racional sin polos en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y tal que el grado del denominador supera en por lo menos 1 unidad al del numerador.

En principio, notemos que las condiciones sobre los grados de los polinomios y el número real α aseguran la convergencia de esta integral.

También debemos tener en cuenta que z^{α} *no* es una función uniforme. Vamos a tener que trabajar con una rama. Concretamente, $z^{\alpha} = \phi(z) = e^{\alpha\varphi(z)}$, con φ una rama del logaritmo. Siendo que queremos integrar sobre la semirrecta $\mathbb{R}_{\geq 0}$, ésta debería formar parte del borde del recinto; pero como además debemos 'sacar' una semirrecta para definir la rama del logaritmo, podemos aprovechar y tomar un recinto de forma anular 'salvo una porción del anillo' alrededor de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de modo tal que 'en el límite' aparezca $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Consideremos el recinto $\mathcal{A}$ de la figura con $R > 0$ suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ sufucientemente chicos como para que todas las singularidades (polos) de f queden dentro de $\mathcal{A}$



Si con $\Gamma_{R,r}$ indicamos el borde (orientado positivamente) de $\mathcal{A}$, parametrizamos las curvas que lo componen y aplicamos el teorema de los residuos, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{\phi(te^{i\varepsilon})}dt \;+\; \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{\phi(Re^{it})}dt \;+\; \int_R^r \frac{f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{\phi(te^{i(2\pi-\varepsilon)})}dt \\ +\; \int_{2\pi-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{\phi(re^{it})}dt \;=2\pi i\sum_{a\in\mathcal{A}} \operatorname{Res}(f/\phi,a)\end{aligned} \tag{1}$$

Analicemos primero las integrales sobre los arcos de circunferencia, i.e., la segunda y la cuarta. Por ejemplo, el integrando de la segunda es:

$$\frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{\phi(Re^{it})}=\frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{e^{\alpha\varphi(Re^{it})}}=\frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{e^{\alpha(\ln|Re^{it}|+i\arg(Re^{it}))}}=\frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}}$$

Y esto vale para todo $0<t<2\pi$. Por lo tanto, como ya no hay problemas de definición,

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{\phi(Re^{it})}dt=\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}}dt \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}}dt$$

Un cálculo similar prueba un resultado análogo para la cuarta integral, i.e.,

$$\int_{2\pi-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{\phi(re^{it})}dt=-\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{r^\alpha e^{i\alpha t}}dt= \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad -\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{r^\alpha e^{i\alpha t}}dt$$

Con respecto a la primera integral, su integrando se puede expresar como:

$$\frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{\phi(te^{i\varepsilon})}=\frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{t^\alpha e^{i\alpha\varepsilon}}$$

Por consiguiente,

$$\int_r^R \frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{\phi(te^{i\varepsilon})}dt=\int_r^R \frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{t^\alpha e^{i\alpha\varepsilon}}=\frac{e^{i\varepsilon}}{e^{i\alpha\varepsilon}}\int_r^R \frac{f(te^{i\varepsilon})}{t^\alpha}dt$$

Y como $f(te^{i\varepsilon})$ es continua en $[r,R]$, es uniformemente continua, lo que permite afirmar que

$$\int_r^R \frac{f(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}}{\phi(te^{i\varepsilon})}dt \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad \int_r^R \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$$

De una manera similar se ve que, para la tercera integral vale,

$$\int_R^r \frac{f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{\phi(te^{i(2\pi-\varepsilon)})}dt=-\int_r^R \frac{f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{\phi(te^{i(2\pi-\varepsilon)})}dt \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad -e^{-i2\pi\alpha}\int_r^R \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$$

Tomando ahora límite para $\varepsilon \to 0$ en (1) obtenemos

$$(1-e^{i2\pi\alpha})\int_r^R \frac{f(t)}{t^\alpha}dt + \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}}dt - \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{r^\alpha e^{i\alpha t}}dt \;=\; 2\pi i\sum_{a\in\mathcal{A}} \operatorname{Res}(f/\phi, a) \tag{2}$$

La primera integral de (2) converge (salvo el factor) a la que intentamos calcular. Veamos que las otras dos convergen a cero.
En efecto,

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{\phi(Re^{it})}dt\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{R^\alpha e^{i\alpha t}}\right| dt \le \int_0^{2\pi} \frac{R|f(Re^{it})|}{R^\alpha}dt$$
$$\le \frac{2\pi}{R^\alpha} \sup_{|z|=R} |zf(z)| \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

debido a que $zf(z)$ es un cociente de polinomios de igual grado y por lo tanto está acotada.
Y para la otra,

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{\phi(re^{it})}dt\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(re^{it})ire^{it}}{r^\alpha e^{i\alpha t}}\right| dt \le \int_0^{2\pi} \frac{r|f(re^{it})|}{r^\alpha}dt$$
$$\le 2\pi r^{1-\alpha} \sup_{|z|=r} |f(z)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

debido a que $|f(z)|$ está acotada en un entorno de cero y a que $1-\alpha > 0$.

Finalmente, si $z_1, \ldots, z_n$ son todas las singularidades (polos) de f,

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}dx = \frac{e^{2\pi\alpha i}}{e^{2\pi\alpha i}-1}2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f/\phi, z_k)$$

TIPO 5: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ln x dx$

con: f una función racional sin polos en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y tal que el grado del denominador supera en por lo menos 2 unidades al del numerador.

En principio, la diferencia de grados entre numerador y denominador garantiza la integrabilidad de esta función.

Sea φ la rama del logaritmo dada por $(\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}, (0, 2\pi))$. Vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función: $F(z) = f(z).\varphi^2(z)$ en el recinto de la página 11 con R, r, ε adecuados de modo tal que todas las singularidades (polos) de f queden en el interior.

Entonces, si $z_1, \ldots, z_n$ son todos los ceros del denominador de f y llamamos $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ al borde del recinto, orientado positivamente,

$$\int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, z_k)$$

Como $\lim\limits_{z\to\infty} zF(z) = \lim\limits_{z\to 0} zF(z) = 0$, las proposiciones 1 y 2 muestran que las integrales sobre los arcos de circunferencia tienden a cero cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, respectivamente.

Entonces, parametrizando los segmentos, podemos afirmar que

$$\int_r^R f(te^{i\varepsilon})\varphi^2(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}dt - \int_r^R f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\varphi^2(te^{i(2\pi-\varepsilon)})e^{i(2\pi-\varepsilon)}dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, z_k) \tag{1}$$

Analicemos cada una de las integrales. Con respecto a la primera, $\varphi(te^{i\varepsilon}) = \ln t + i\varepsilon$; por lo tanto $\varphi^2(te^{i\varepsilon}) = \ln^2 t + 2i\varepsilon \ln t - \varepsilon^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_r^R f(te^{i\varepsilon})\varphi^2(te^{i\varepsilon})e^{i\varepsilon}dt =& e^{i\varepsilon}\int_r^R f(te^{i\varepsilon})\ln^2 t dt \;+\; 2i\varepsilon e^{i\varepsilon}\int_r^R f(te^{i\varepsilon})\ln t dt\\ &- \varepsilon^2 e^{i\varepsilon}\int_r^R f(te^{i\varepsilon})dt\end{aligned}$$

Con respecto a la segunda, $\varphi(te^{i(2\pi-\varepsilon)}) = \ln t + i(2\pi - \varepsilon)$ y un cálculo similar al anterior muestra que

$$\begin{aligned}\int_r^R f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\varphi^2(te^{i(2\pi-\varepsilon)})e^{i(2\pi-\varepsilon)}dt =& e^{i(2\pi-\varepsilon)}\int_r^R f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\ln^2 t dt\\ &+\; 2i(2\pi-\varepsilon)e^{i(2\pi-\varepsilon)}\int_r^R f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\ln t dt\\ &- (2\pi-\varepsilon)^2 e^{i(2\pi-\varepsilon)}\int_r^R f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})dt\end{aligned}$$

Tomando límite para $\varepsilon \to 0$ en (1) y teniendo en cuenta que el intervalo de integración en finito y que los integrandos son continuos —y por lo tanto uniformemente continuos— resulta

$$\begin{aligned}\int_r^R f(x)\ln^2 x dx - \int_r^R f(x)\ln^2 x dx - 4\pi i\int_r^R f(x)\ln x dx - 4\pi^2\int_r^R f(x)dx\\ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, z_k)\end{aligned}$$

Simplificando y reordenando

$$4\pi^2 \int_r^R f(x)dx + i\ 4\pi \int_r^R f(x)\ln x dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k)$$

Se deduce de aquí que (igualando las partes imaginarias)

$$\int_r^R f(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k)\right)$$

Finalmente, tomando límite para $r \to 0$ y $R \to \infty$

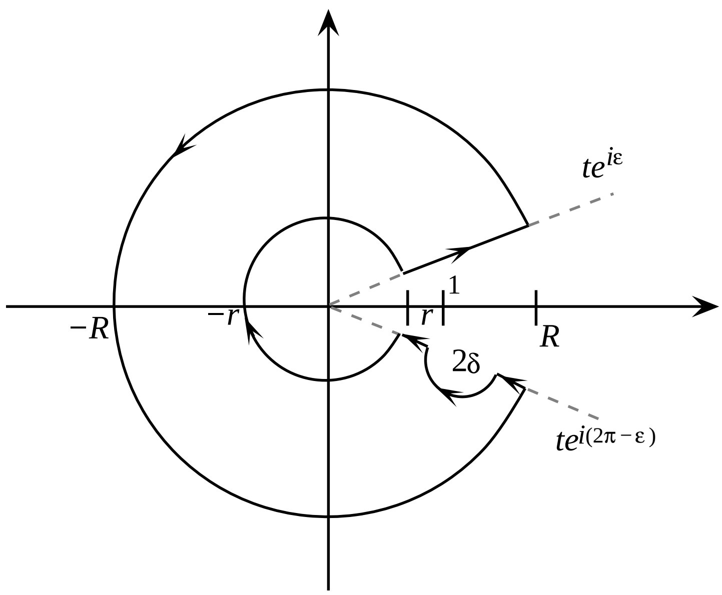
$$\int_0^\infty f(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k)\right)$$

TIPO 6: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ln x dx$

con: f una función racional con un polo simple en $x = 1$, sin otros polos reales positivos, y tal que el grado del denominador supera en por lo menos 2 unidades al del numerador.

En principio, la diferencia de grados entre numerador y denominador garantiza la integrabilidad de esta función.

Sea φ la rama del logaritmo dada por $(\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}, (0, 2\pi))$. Vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función: $F(z) = f(z).\varphi^2(z)$ en el recinto de la figura con R, r, ε adecuados de modo tal que todas las singularidades (polos) de f queden en el interior.



Entonces, si $z_1, \ldots, z_n$ son todos los ceros del denominador de f (por hipótesis $z_k \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$ y llamamos $\Gamma_{R,r,\varepsilon}$ al borde del recinto, orientado positivamente,

$$\int_{\Gamma_{R,r,\varepsilon}} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(F, z_k)$$

Como $\lim\limits_{z\to\infty} zF(z) = \lim\limits_{z\to 0} zF(z) = 0$, las proposiciones 1 y 2 muestran que las integrales sobre los arcos de circunferencia (centrados en $z = 0$) tienden a cero cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, respectivamente.

La integral sobre el segmento del primer cuadrante se comporta exactamente igual que en el caso anterior. Entonces, las únicas que tenemos que analizar son las integrales sobre los segmentos y la semicircunferencia de radio δ del cuarto cuadrante. Siguiendo el orden de la orientación, son

$$\begin{aligned}
-e^{i(2\pi-\varepsilon)} \int_{1+\delta}^{R} & f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\varphi^2(te^{i(2\pi-\varepsilon)})dt \\
&= -e^{i(2\pi-\varepsilon)} \int_{1+\delta}^{R} f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})(\ln t + i(2\pi - \varepsilon))^2 dt \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_{1+\delta}^{R} f(t)(\ln^2(t) + 4\pi i \ln t - 4\pi^2)dt \\
&\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{1+\delta}^{\infty} f(t)\ln^2 t dt - 4\pi i \int_{1+\delta}^{\infty} f(t)\ln t dt + 4\pi^2 \int_{1+\delta}^{\infty} f(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-e^{i(2\pi-\varepsilon)} \int_{r}^{1-\delta} & f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})\varphi^2(te^{i(2\pi-\varepsilon)})dt \\
&= -e^{i(2\pi-\varepsilon)} \int_{r}^{1-\delta} f(te^{i(2\pi-\varepsilon)})(\ln t + i(2\pi - \varepsilon))^2 dt \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_{r}^{1-\delta} f(t)(\ln^2(t) + 4\pi i \ln t - 4\pi^2)dt \\
&\underset{r\to 0}{\longrightarrow} -\int_{0}^{1-\delta} f(t)\ln^2 t dt - 4\pi i \int_{0}^{1-\delta} f(t)\ln t dt + 4\pi^2 \int_{0}^{1-\delta} f(t)dt
\end{aligned}$$

La suma de estas dos integrales converge —cuando $\delta \to 0$— a

$$-\int_{0}^{\infty} f(t)\ln^2 t dt + 4\pi^2 \mathrm{vp}\int_{0}^{\infty} f(t)dt + i\left(4\pi \int_{0}^{\infty} f(t)\ln t dt\right) \tag{1}$$

Como F tiene un polo simple en $z=1$, $\text{Res}(F,1) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)F(z)$. Pero φ *no* está definida en ningún entorno reducido de 1. Luego, para poder calcular este límite, vamos a extender a φ con otra rama del logaritmo que sí esté definida en un entorno de 1 y que coincida con φ en el cuarto cuadrante. Tomemos ψ como la rama principal del logaritmo. Teniendo en cuenta que en el cuarto cuadrante: $\psi(z) = \varphi(z) - 2\pi i$, basta tomar la rama $\alpha(z) = \psi(z) + 2\pi i$. Entonces

$$\text{Res}(F,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\alpha^2(z)f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ f=P/Q}}{=} -4\pi^2\frac{P(1)}{Q'(1)}$$

Entonces, $F(z) = -4\pi^2\dfrac{P(1)}{Q'(1)}\dfrac{1}{z-1} + g(z)$, con g holomorfa en un entorno de $z=1$.

Ya podemos calcular la última integral. Llamemos C_δ la semicircunferencia de radio δ recorrida en sentido negativo. Luego, en virtud de la proposición 6

$$\int_{C_\delta} F(z)dz \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} -\pi i\text{Res}(F,1) = 4\pi^3\frac{P(1)}{Q'(1)} \tag{2}$$

A partir de (1) y (2) podemos afirmar

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F,z_k) = i\left(-4\pi\int_0^\infty f(x)\ln x dx + \frac{4\pi^3 P(1)}{Q'(1)} - i4\pi^2\text{vp}\int_0^\infty f(x)dx\right)$$

Finalmente, simplificando $i\pi$ e igualando partes reales, obtenemos

$$\int_0^\infty f(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\text{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(F,z_k)\right) + \frac{\pi^2 P(1)}{Q'(1)}$$

Bibliografía

Balanzat, M., *Matemática Avanzada para la Física*, EUDEBA, Buenos Aires, 1973.