

# MATE IV

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS COMPLEJAS

PATRICIA JANCSA

Recordemos las propiedades: para todo  $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$ , por definición de las funciones trigonométricas de variable real  $t$ , se tiene que si  $\arg(z) = t + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$

$$z = |z|e^{it} = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

$$\Rightarrow \cos(t) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Además, volviendo a la expresión en forma binómica de  $z = x + yi \in \mathbb{C}$

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

# Funciones Trigonométricas Complejas

Si  $w = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$  entonces  $\bar{w} = e^{-it}$ , luego

$$\cos t = \operatorname{Re}(w) = \frac{w + \bar{w}}{2} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{Im}(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Extendamos la definición de las funciones trigonométricas reales a funciones de variable compleja,  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Estas **funciones trigonométricas complejas** tienen propiedades formales similares a sus correspondientes reales.

# sen(z) y cos(z)

Proposición 1: Las funciones  $\text{sen}(z)$  y  $\text{cos}(z)$  están definidas en todo  $\mathbb{C}$  y verifican las siguientes propiedades  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

1  $\text{sen}'(z) = \text{cos}(z)$ ,  $\text{cos}'(z) = -\text{sen}(z)$

2  $\text{cos}(z + w) = \text{cos}(z)\text{cos}(w) - \text{sen}(z)\text{sen}(w)$ ,  
 $\text{sen}(z + w) = \text{cos}(z)\text{sen}(w) + \text{sen}(z)\text{cos}(w)$

3  $\text{cos}^2(z) + \text{sen}^2(z) = 1$

4  $\text{cos}(z + 2n\pi) = \text{cos}(z)$ ,  $\text{sen}(z + 2n\pi) = \text{sen}(z)$  :  $n \in \mathbb{Z}$

5  $\text{sen}(z)$ ,  $\text{cos}(z)$  son funciones **no** acotadas.



$$\mathbf{1} \quad \text{sen}'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\text{sen}(z)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{sen}'(z) &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right] = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right] = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} \\ &= \frac{-(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = -\text{sen}(z) \quad \checkmark \end{aligned}$$

# sen(z) y cos(z) son holomorfas en $\mathbb{C}$

Proposición 2: Las funciones trigonométricas complejas sen(z) y cos(z) son holomorfas en todo  $\mathbb{C}$ .

Demostración:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

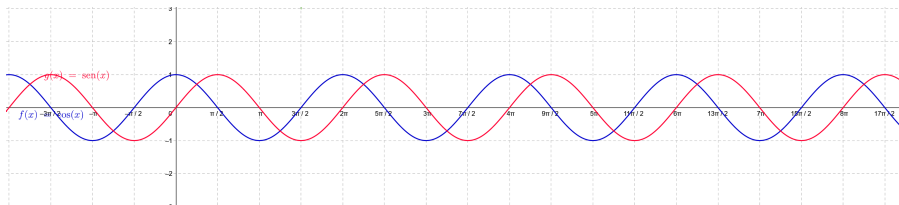
son combinaciones lineales de composiciones de exponenciales con  $\pm iz$ , por lo cual, resultan holomorfas en todo  $\mathbb{C}$ .

# Conjunto de ceros de $\sin(z)$ y $\cos(z)$

Proposición 3: Las raíces o ceros de las **funciones trigonométricas complejas  $\sin(z)$  y  $\cos(z)$**  son los mismos que para las funciones de variable real correspondientes:

$$\mathcal{C}_0(\sin(z)) = \{ z_n = n\pi : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\mathcal{C}_0(\cos(z)) = \left\{ w_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$



# Cálculos de ceros de $\text{sen}(z)$

Sea  $z \in \mathbb{C} : 0 = \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , entonces debe ser cero el **numerador**, donde  $z = x + yi \Rightarrow iz = -y + xi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= e^{iz} - e^{-iz} = e^{-y} [\cos(x) + i \text{sen}(x)] - e^y [\cos(-x) + i \text{sen}(-x)] \\ &= e^{-y} [\cos(x) + i \text{sen}(x)] - e^y [\cos(x) - i \text{sen}(x)] \\ &= \cos(x) [e^{-y} - e^y] + i \text{sen}(x) [e^{-y} + e^y]\end{aligned}$$

Luego, deben ser cero por separado la parte **real** y la parte **imaginaria**:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(x) [e^{-y} - e^y] \\ 0 = \text{sen}(x) \underbrace{[e^{-y} + e^y]}_{>0} \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(x) = 0 \Rightarrow x = n\pi : n \in \mathbb{Z}$$

Evaluemos entonces, en la parte real, el coseno en estos valores de  $x$

$$\Rightarrow \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$$

Luego, para que sea cero la parte real, debe ser cero el factor

$$\Rightarrow 0 = e^{-y} + e^{-y} \Rightarrow y = 0$$

Obtenemos que  $z$  tiene parte real  $x = n\pi$  y parte imaginaria  $y = 0$

Por lo tanto, el conjunto de ceros de  $\operatorname{sen}(z)$  es

$$\mathcal{C}_0(\operatorname{sen}(z)) = \{ z_n = n\pi : n \in \mathbb{Z} \} \checkmark$$

## Cálculos de ceros de $\cos(z)$

Sea  $z \in \mathbb{C} : 0 = \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$ , entonces debe ser cero el **numerador**, donde  $z = x + yi \Rightarrow iz = -y + xi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= e^{iz} + e^{-iz} = e^{-y} [\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)] + e^y [\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)] \\ &= e^{-y} [\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)] + e^y [\cos(x) - i \operatorname{sen}(x)] \\ &= \cos(x) [e^{-y} + e^y] + i \operatorname{sen}(x) [e^{-y} - e^y]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  deben ser cero por separado la parte **real** y la parte **imaginaria**:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(x) \underbrace{[e^{-y} + e^y]}_{>0} \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \\ 0 = \operatorname{sen}(x) \underbrace{[e^{-y} - e^y]}_{=0} \end{cases}$$

Evaluemos entonces, en la parte imaginaria, el seno en estos valores de  $x$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \left( (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right) = -(-1)^n \neq 0$$

Luego, para que sea cero la parte imaginaria, debe ser cero el factor

$$\Rightarrow 0 = e^{-y} - e^{-y} \Rightarrow y = 0$$

Obtenemos que  $z$  tiene parte real  $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  y parte imaginaria  $y = 0$

Por lo tanto, el conjunto de ceros es

$$\mathcal{C}_0(\cos(z)) = \left\{ w_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\} \checkmark$$

# Tangente y cotangente

Proposición 4: Se definen las funciones las funciones trigonométricas tangente y cotangente complejas:

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos}(z)}, \quad \operatorname{cotan}(z) = \frac{\operatorname{cos}(z)}{\operatorname{sen}(z)},$$

en los dominios restringidos donde el denominador es no nulo:

$$\operatorname{Dom}(\tan(z)) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{cotan}(z)) = \{ z \in \mathbb{C} : z \neq n\pi \}$$

Sus ceros ocurren en los mismos valores que para las funciones de variable real correspondientes:

$$\mathcal{C}_0(\tan(z)) = \{ z_n = n\pi : n \in \mathbb{Z} \}$$

# Secante y cosecante

Proposición 5: Se definen las funciones las **funciones trigonométricas secante y cosecante complejas**:

$$\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}, \quad \operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)},$$

en los dominios restringidos que corresponden al denominador no nulo:

$$\operatorname{Dom}(\sec(z)) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{cosec}(z)) = \{ z \in \mathbb{C} : z \neq n\pi \}$$

Demostración: es consecuencia inmediata del cálculo anterior de ceros del  $\operatorname{sen}(z)$  y del  $\cos(z)$  ✓ .



# Las funciones trigonométricas son no acotadas en $\mathbb{C}$

A diferencia de sus homónimas **reales** que son acotadas:

$$|\operatorname{sen}(t)| \leq 1, \quad |\operatorname{cos}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

**el coseno y seno complejo no son acotadas:**

Si  $t \in \mathbb{R}$

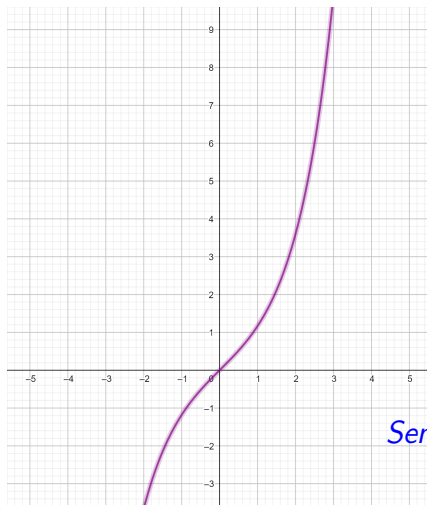
- $\operatorname{sen}(it) = i \operatorname{Senh}(t)$

$$\Rightarrow |\operatorname{sen}(it)| = |\operatorname{Senh}(t)| \rightarrow +\infty \text{ cuando } t \rightarrow \pm\infty$$

- $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + it\right) = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{Cosh}(y) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{Senh}(t) = -i \operatorname{Senh}(t)$

$$\Rightarrow |\operatorname{cos}(it)| = |\operatorname{Senh}(t)| \rightarrow +\infty \text{ cuando } t \rightarrow \pm\infty$$

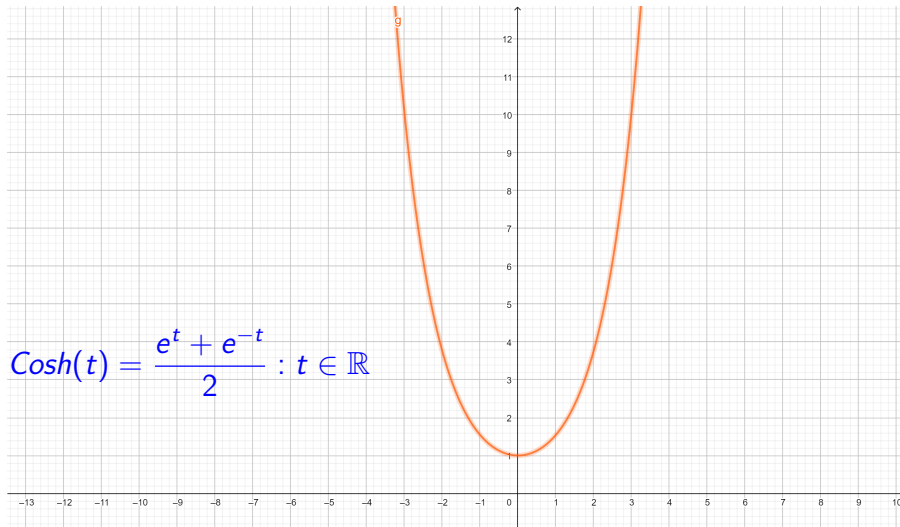
# Seno Hiperbólico Real



$$\text{Senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} : t \in \mathbb{R}$$



# Coseno Hiperbólico Real



# Funciones Hiperbólicas Complejas

Se definen las funciones **hiperbólicas Complejas** en analogía con las correspondientes de variable real, para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\text{Cosh}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{Senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Estas **funciones hiperbólicas complejas** tienen propiedades formales similares a sus correspondientes reales.

# Funciones Hiperbólicas Complejas

Proposición 6: Las **funciones hiperbólicas complejas**  $\text{Senh}(z)$  y  $\text{Cosh}(z)$  están definidas en todo  $\mathbb{C}$  y verifican  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

- 1  $\text{Senh}'(z) = \text{Cosh}(z)$ ,  $\text{Cosh}'(z) = \text{Senh}(z)$
- 2  $\cos(z) = \cos(x)\text{Cosh}(y) - i \sin(x)\text{Senh}(y)$ ,  
 $\sin(z) = \sin(x)\text{Cosh}(y) + i \cos(x)\text{Senh}(y)$
- 3  $\text{Cosh}^2(z) - \text{Senh}^2(z) = 1$

Demostración de 1):

$$\text{Senh}'(z) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right] = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{Cosh}(z)$$

$$\text{Cosh}'(z) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right] = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \text{Senh}(z)$$



Proposición 7: Las **funciones hiperbólicas complejas**  $\text{Senh}(z)$  y  $\text{Cosh}(z)$  son holomorfas en todo  $\mathbb{C}$ .

Demostración:

$$\text{Cosh}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{Senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

son composiciones de exponenciales, por lo cual, resultan holomorfas en todo  $\mathbb{C}$ .

# Conjuntos de ceros de $\text{Senh}(z)$ y $\text{Cosh}(z)$

Proposición 8: Las raíces o ceros de las **funciones hiperbólicas complejas**  $\text{Senh}(z)$  y  $\text{Cosh}(z)$  son los siguientes números **imaginarios puros**:

$$\mathcal{C}_0(\text{Senh}(z)) = \{ z_n = n\pi i : n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\mathcal{C}_0(\text{Cosh}(z)) = \left\{ w_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}i : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

## Cálculos de ceros de $\text{Senh}(z)$

Sea  $z \in \mathbb{C} : 0 = \text{Senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ , entonces debe ser cero el **numerador**, donde  $z = x + yi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= e^z - e^{-z} = e^x [\cos(y) + i \text{sen}(y)] - e^{-x} [\cos(-y) + i \text{sen}(-y)] \\ &= e^x [\cos(y) + i \text{sen}(y)] - e^{-x} [\cos(y) - i \text{sen}(y)] \\ &= \cos(y) [e^x - e^{-x}] + i \text{sen}(y) [e^x + e^{-x}]\end{aligned}$$

Luego, deben ser cero ambas partes **real** e **imaginaria**:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(y) [e^{-x} - e^x] \\ 0 = \text{sen}(y) \underbrace{[e^x + e^{-x}]}_{>0} \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(y) = 0 \Rightarrow y = n\pi : n \in \mathbb{Z}$$



Evaluemos entonces, en la parte real, el coseno en estos valores de  $x$

$$\Rightarrow \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$$

Luego, para que sea cero la parte real, debe ser cero el factor

$$\Rightarrow 0 = e^x - e^{-x} \Rightarrow 1 = e^{2x} \Rightarrow x = 0$$

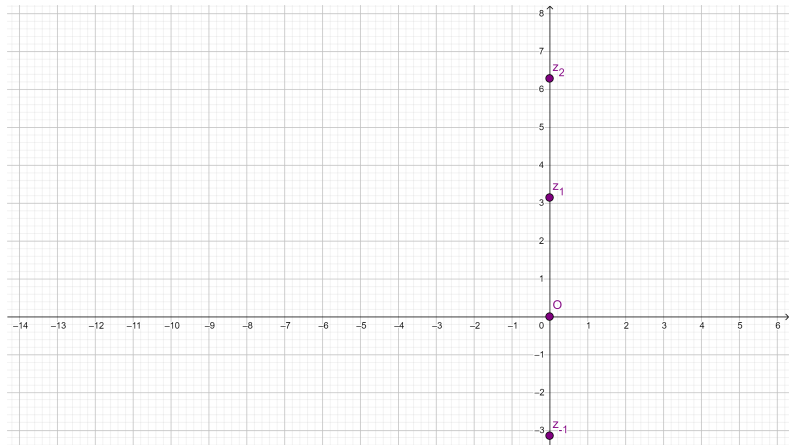
Obtenemos que  $z$  tiene parte real  $x = 0$  y parte imaginaria  $y = n\pi$

Por lo tanto, el conjunto de ceros de  $\text{Senh}(z)$  es

$$\mathcal{C}_0(\text{Senh}(z)) = \{ z_n = n\pi i : n \in \mathbb{Z} \} \checkmark$$

El conjunto de ceros de  $\text{Senh}(z)$  es

$$\mathcal{C}_0(\text{Senh}(z)) = \{ w_n = n\pi i : n \in \mathbb{Z} \} \quad \checkmark$$



# Cálculos de ceros de $\text{Cosh}(z)$

Sea  $z \in \mathbb{C} : 0 = \text{Cosh}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ , entonces debe ser cero el **numerador**, donde  $z = x + yi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= e^z + e^{-z} = e^x [\cos(y) + i \text{sen}(y)] + e^{-x} [\cos(-y) + i \text{sen}(-y)] \\ &= e^x [\cos(y) + i \text{sen}(y)] + e^{-x} [\cos(y) - i \text{sen}(y)] \\ &= \cos(y) [e^x + e^{-x}] + i \text{sen}(y) [e^x - e^{-x}]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  deben ser cero por separado la parte **real** y la parte **imaginaria**:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(y) \underbrace{[e^x + e^{-x}]}_{>0} \Rightarrow \cos(y) = 0 \Rightarrow y = (2n + 1) \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \\ 0 = \text{sen}(y) \underbrace{[e^x - e^{-x}]}_{=0} \end{cases}$$



Evaluemos entonces, en la parte imaginaria, el seno en estos valores de  $y$

$$\Rightarrow \text{sen} \left( (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right) = -(-1)^n \neq 0$$

Luego, para que sea cero la parte imaginaria, debe ser cero el factor

$$\Rightarrow 0 = e^x - e^{-x} \Rightarrow x = 0$$

Obtenemos que  $z$  tiene parte real  $y = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$  y parte imaginaria  $x = 0$

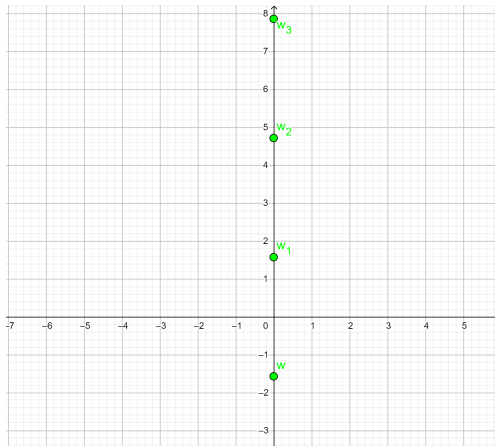
Por lo tanto, el conjunto de ceros es

$$\mathcal{C}_0(\text{Cosh}(z)) = \left\{ w_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} i : n \in \mathbb{Z} \right\} \checkmark$$



El conjunto de ceros de  $\text{Cosh}(z)$  es

$$\mathcal{C}_0(\text{Cosh}(z)) = \left\{ w_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}i : n \in \mathbb{Z} \right\} \checkmark$$



# Relación entre las trigonométricas y las hiperbólicas en $\mathbb{C}$

$$\operatorname{Senh}(iz) = i \operatorname{sen}(z), \quad i \operatorname{Senh}(z) = \operatorname{sen}(iz)$$

$$\operatorname{Cosh}(iz) = \cos(z), \quad \operatorname{Cosh}(z) = \cos(iz)$$

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{Cosh}(y) + i \cos(x)\operatorname{Senh}(y)$$

$$\cos(z) = \cos(x)\operatorname{Cosh}(y) - i \operatorname{sen}(x)\operatorname{Senh}(y)$$

# Series de Taylor de $\sin(z)$ y $\cos(z)$

A partir de la fórmula de los coeficientes  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  obtenemos las series de Taylor (Práctica 4)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \checkmark$$