MATEMÁTICA 4

Práctica 4: Series

Patricia Jancsa

Serie geométrica

Una serie geométrica es aquella en la que cada término es la potencia k-ésima de una constante, llamada razón, $z \in \mathbb{C}$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} z^k : \qquad |z| < 1$$

Calculemos la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

CA: multipliquemos por este factor $(1 - z) \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)$

$$= \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right) - \left(z + z^2 + \cdots + z^{n+1}\right) = 1 - z^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \; \forall z \neq 1$$

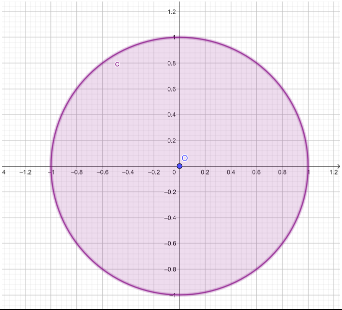
Exponencial real con base $a > 0$

Si $0 < a \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to \infty} a^t = 0 \iff 0 < a < 1$

La serie geométrica converge $\iff |z| < 1$

$$(1-z)S_n = 1 - z^{n+1} \Longrightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{si } |z| < 1 \\ \nexists & \text{si } |z| \geq 1 \end{cases}$$



Si $z \neq 1, |z| = 1 \Rightarrow z = e^{it}$ entonces el término general no tiende a cero

$$\Rightarrow a_n = z^n = (e^{it})^n = e^{nit}$$

oscila indefinidamente en la circunferencia unidad: no converge.

Proposición : La serie geométrica converge $\iff |z| < 1$ y en este caso, el valor de la serie es

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \forall\ |z| < 1 \ \checkmark$$

La serie es absolutamente convergente en el interior del disco unidad.

Ejemplo 2. a. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Solución: Usemos $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\ \forall\ |z| < 1$ con $z = \frac{1}{2}$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 2 \checkmark$$

Ejemplo 2. b. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(3i)^n}$.

Solución: Usemos $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}\ \forall\ |z|<1$ con $z = \dfrac{1}{3i}$:

Solución: la razón es $z = \dfrac{1}{3i} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{3i}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3i}\right)^n = 1 + \frac{1}{3i} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27i} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3i}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3i-1}{3i}\right)} = \frac{3i}{(3i-1)} = \frac{3i\cdot(-3i-1)}{10} = \frac{9-3i}{10}\ \checkmark$$

Ejemplo 2. c. Calcular 0.333333...

Solución: Usemos $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z} \ \forall \ |z| < 1$

Solución: Escribamos 0.333333 como una serie geométrica:

$$0.333333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots = \frac{3}{10} \cdot \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{1}{3} \checkmark$$

Obtener una representación en series de potencias centrada en $z = -2$ de $h(z) = \dfrac{1}{z-3}$ y su región de convergencia.

- Buscamos una serie de potencias de $z - (-2) = z + 2$.

Función racional $\Rightarrow$ usar serie geométrica:

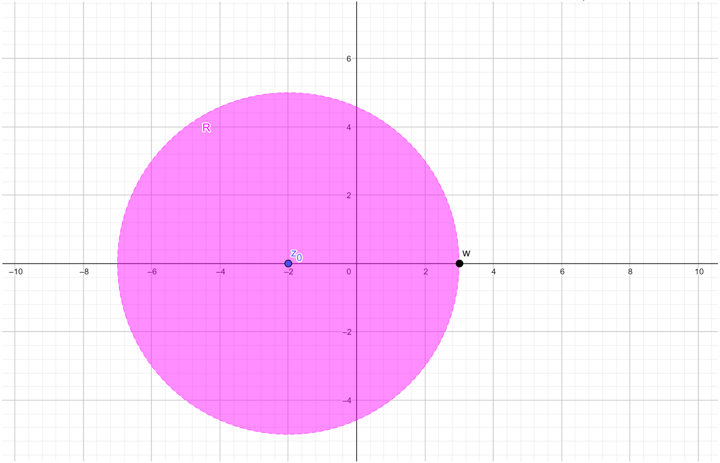
$$h(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{-5+z+2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{z+2}{5}\right)} = -\frac{1}{5}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{5}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{n+1}}(z+2)^n \quad \forall\ |z+2| < 5$$

Región de convergencia: $\left|\dfrac{z+2}{5}\right| = |w| < 1 \Rightarrow \mathfrak{D} = \{z : |z+2| < 5\}$ ✓

Región de convergencia: $\left|\frac{z+2}{5}\right| = |w| < 1 \Rightarrow \mathcal{D} = \{z : |z+2| < 5\}$ ✓

- $\omega = 3$ pertenece a la frontera pero $\omega = 3 \notin \mathcal{D}$ abierto



La serie no converge sobre el borde

Si $|z+2| = 5$ entonces el término general no tiende a cero, es decir, si $a_n = (\frac{z+2}{5})^n$ donde $\left|\dfrac{z+2}{5}\right| = 1$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{z+2}{5}\right)^n = (e^{it})^n = e^{nit}$$

oscila indefinidamente en la circunferencia unidad, pero no converge ✓

La convergencia (puntual) de la serie al valor $h(z)$ es absoluta en cada z en el interior del disco, como límite de sucesión de sumas parciales.
Por unicidad, esta serie es la serie de Taylor de la función $h(z)$ centrada en $z = -2$

Hallar $z \in \mathbb{C}$: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z+i}{z+2i} \right)^n$ converge

Sol: Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que la serie anterior sea convergente:

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{z+2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \text{ converge } \iff |w| < 1$$

donde $w = \dfrac{z+i}{z+2i} =: h(z)$

¿Para qué z resulta $\left| \dfrac{z+i}{z+2i} \right| < 1$?

¿Qué z manda h en la circunferencia unidad?

$\Rightarrow$ Estudiemos la homografía inversa:

$$\text{circunferencia unidad} \mapsto^{h^{-1}} \text{circunferencia ó recta}$$

$$\text{circunferencia unidad} \leftarrow^{h} \text{circunferencia ó recta}$$

$$h(z) = \frac{z+i}{z+2i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

$$h^{-1}(z) = \frac{2z-1}{iz-i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Vemos que h^{-1} lleva:

$$\Rightarrow \boxed{h^{-1}(1) = \infty, \quad h^{-1}(-1) = \frac{3}{2i} = A, \quad h^{-1}(i) = \frac{-(1+3i)}{2} = B}$$

$\Rightarrow$ la homografía inversa: lleva

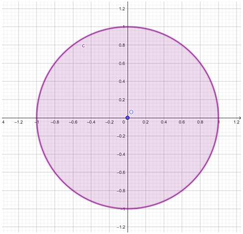
$$\text{circunferencia unidad} \mapsto^{h^{-1}} \text{recta por A y B}$$

Esta circunferencia divide el plano en 2 componentes conexas (abiertas), y lo mismo la recta

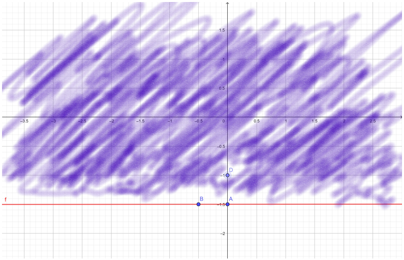
circunferencia unidad $\mapsto^{h^{-1}}$ recta $\mathcal{L}$: por A$= \dfrac{-3i}{2}$ y B $= \dfrac{-(1+3i)}{2}$

$$0 \ \mapsto^{h^{-1}} \ -i$$

interior del disco unidad $\mapsto^{h^{-1}}$ semiplano superior a la recta $\mathcal{L}$

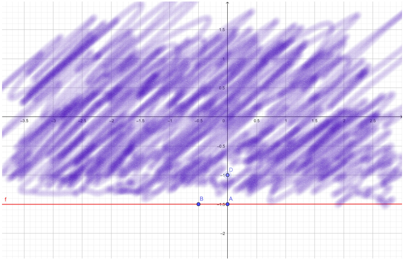


$\mapsto^{h^{-1}}$

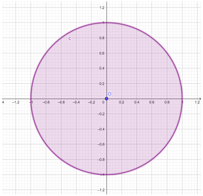


h lleva el semiplano en el disco unidad

semiplano superior a la recta $\mathcal{L} \overset{h}{\mapsto}$ interior del disco unidad



$\overset{h}{\mapsto}$



Concluímos que la serie $S(z)$ es absolutamente convergente en la región

$$\boxed{\Omega = \left\{ z = x + yi \in \mathbb{C} : y > -\frac{3}{2} \right\} \quad \checkmark}$$

Criterios de convergencia para series positivas

Criterio de D´Alembert. Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, calculemos el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty)$$

entonces

- Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge (no existe el límite de la sucesión de sumas parciales).
- Si $L = 1$, el criterio no permite decidir si la serie converge.

Criterio de Cauchy. Es el enunciado análogo pero calculando L como el límite

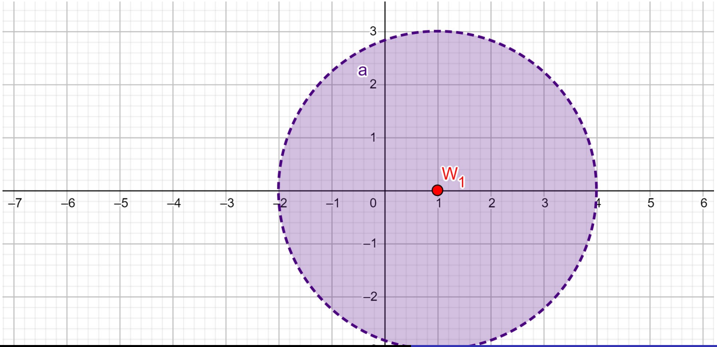
$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{|a_n|} \in [0, +\infty)$$

Radio de Convergencia

El Radio de Convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es el único número real $R > 0$ tal que la serie converge para todo z en el interior del disco abierto:

$$|z - z_0| < R$$

y diverge para todo z: $|z - z_0| > R$.
El disco D se llama la región de convergencia



Calcular el radio de convergencia

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^2(1+3i)} z^n$

Usemos el Criterio de D'Alembert: calculemos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{(n+1)^2|1+3i|}}{\frac{n!|z|^n}{n^2|1+3i|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1) \underbrace{\left[\frac{n}{n+1}\right]^2}_{\to 1} |z| = +\infty \ \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 \Rightarrow R = 0$$

Concluímos que la serie converge sólo para z=0 y diverge para cualquier $z \neq 0$ ✓

Series de Taylor de las Funciones Fundamentales

A partir de la fórmula de los coeficientes $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ obtenemos:

- $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$

- $\operatorname{sen}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

- $\cos(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \ : \ z \in \mathbb{C}$

- $\operatorname{Senh}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

- $\operatorname{Cosh}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \ : \ z \in \mathbb{C}$

- $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \ : |z| < 1$

- $\operatorname{Log}(1+z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \ : |z| < 1$