MATEMÁTICA 4

PRÁCTICA 4: SERIES
SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA
PATRICIA JANCSA

Criterio y Lema sobre la Convergencia Uniforme:

• CRITERIO DE WEIERSTRASS:

Si una sucesión de funciones satisface $|f_n(z)| \leq a_n \; \forall z \in D$ y la serie $\sum a_n$ es convergente

$\Rightarrow$la serie $\sum_n f_n(z)$ converge absoluta y uniformemente en D.

• Lema: La Convergencia $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ es uniforme en D

si y sólo si existen los supremos $S_n = Sup\,\{|f_n(z) - f(z)| : z \in D\}$ y $S_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

Práctica 4, Ej 1. a) Analizar la convergencia uniforme de $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ en $[1, +\infty)$ y en $(2, 5]$

Solución: El límite puntual es

$$f(x) = \begin{cases} e & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

• La convergencia no es uniforme en $[1, +\infty)$, pues el límite puntual no es una función continua.

Por ejemplo, si $\epsilon = \frac{1}{2}$ y existiera N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, se tendría

$$e = e - 0 = |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}, \quad \text{absurdo!}$$

• La convergencia sí es uniforme en $(2, 5]$ pues:

Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ luego, dado $\epsilon > 0$, existe N tal que

$$\forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{2^n}\right| < \frac{\epsilon}{e^5}$$

Por lo tanto, en $(2, 5]$, dado $\epsilon > 0$, existe N tal que:

$$\forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{e^x}{x^n}\right| \leq \frac{e^5}{2^n} < e^5 \frac{\epsilon}{e^5} \leq \epsilon \; \checkmark$$

Práctica 4, Ej 1. b) Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ en $(1, +\infty)$

- Convergencia Puntual: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \forall x$

- La convergencia NO es uniforme en $(1, +\infty)$ pues $\dfrac{e^x}{x^n}$ no está acotada en $(1, +\infty)$

(dado que tiende a infinito cuando $x \to \infty$, para cada n).

Es decir, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, existe $x_0 > 1$ tal que

$$x \geq x_0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^n} > 1$$

Por lo tanto, dados $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ y $N \in \mathbb{N}$, sea $n > N$, entonces existe x_0, que depende de n, tal que

$$|f_n(x_0)| = \frac{e^{x_0}}{{x_0}^n} > 1 > \epsilon \checkmark$$

Práctica 4, Ej 1. d) Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = \dfrac{n}{(n+1)} z$ en $\mathbb{C}$

- Convergencia Puntual: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

- La convergencia NO es uniforme en $\mathbb{C}$.

Sea la sucesión $z_n = n + 1$ y sea $\epsilon = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow |f_n(z_n) - f(z_n)| = \left| \frac{n}{(n+1)} \cdot (n+1) - (n+1) \right| = 1 > \epsilon \checkmark$$

Práctica 4, Ej 1. e) Analizar la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{n^2+3}\right) \operatorname{sen}(2nx - \pi)$ en $\mathbb{R}$

Solución:

- Convergencia Puntual: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ en $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+3} = 0$, luego, dado, $\epsilon > 0$, existe N tal que $n \geq N \Rightarrow \left| \dfrac{n+1}{n^2+3} \right| < \epsilon$

- La Convergencia es UNIFORME pues el seno está uniformemente acotado en $\mathbb{R}$:

$$|\operatorname{sen}(2nx - \pi)| \leq 1 \quad \forall x, \ \forall n$$

Por lo tanto, cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe N tal que

$$\boxed{n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n+1}{n^2+3}\right| |\operatorname{sen}(2nx - \pi)| < \epsilon \quad \forall x \checkmark}$$

Práctica 4, Ej 2. Probar que $\boxed{f_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx)} \to 0}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$.
Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$.

Solución:

- Convergencia Puntual: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(1+nx)} = 0$ en $(0, 1)$.
- La convergencia NO es uniforme en $(0, 1)$ pues si $\boxed{x_n = \dfrac{1}{n}}$ entonces

$$\boxed{f_n(x_n) = \frac{1}{(1+n\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \neq 0 \checkmark}$$

- Convergencia Uniforme en $[a, b] \subset (0, 1)$:

$\boxed{0 < a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx}$, por lo tanto, el siguiente límite no depende de x:

$$\boxed{0 < |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+nx)} \leq \frac{1}{1+na} \to 0 \checkmark}$$

EJERCICIOS ADICIONALES Y DE CLASES EN PIZARRÓN

Ejercicio Adicional 1. Analizar la convergencia puntual y uniforme de

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Solución. Convergencia puntual: es de tipo 0 x acotado en $\mathbb{R}$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) \to 0$$

El candidato a límite uniforme es la función dada por el límite puntual $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, que es un buen candidato porque es continua (condición necesaria). Comprobemos esto; notar que la sgte desigualdad no depende de x, lo cual dice que la convergencia es uniforme:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \ \checkmark$$

Ejercicio Adicional 2. Analizar la convergencia puntual y uniforme en $[0,1]$, en $[0,1)$ y $[0,r]$: $0 < r < 1$ de $f_n(x) = x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solución. Convergencia puntual:

- Si $x = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$
- Si $x = 1 \to \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$
- Si $0 \leq x < 1 \to \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

Por lo tanto, la sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0: & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1: & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, en cada intervalo:

- En $[0,1) \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- En $[0,r) \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- En $[0,1] \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ que no es continua, por lo cual la convergencia no es uniforme.

- En $[0,r)$ la convergencia es uniforme pues

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |x^n| \leq |r^n| \to 0$$

- En $[0,1)$ la convergencia no es uniforme pues, no vale que dado $\epsilon > 0$, existe un

$$N: \forall n \geq N, \quad |f_n(x)| < \epsilon \ \forall x \in [0,1)$$

Probemos lo contrario, es decir, que existe un ϵ tal que cualquiera sea N se puede encontrar un $x \in [0,1)$ que para algún $n \geq N$,

$$|f_n(x)| \geq \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = \frac{1}{4}$ y la sucesión

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

entonces

$$f(x_n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \checkmark$$

Llegamos a un absurdo, por lo cual, la convergencia no es uniforme en $[0,1)$.

Obs: En general, si $f_n, \ f$ son continuas, para probar que f_n no converge uniformemente a su límite puntual f en algún dominio Ω es suficiente hallar una sucesión $x_n \in \Omega$ tal que

$$|fn(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$$

Ejercicio Adicional 3. a) **Analizar la convergencia puntual y uniforme en** $\Omega = \{z : z \neq 1\}$ **de**

$$\boxed{f_n(z) = \frac{1}{n(1-z)} : \Omega \to \mathbb{C}}$$

b) Probar que si $K \subset \Omega$ es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, entonces $f_n(z) = \dfrac{1}{n(1-z)}$ converge a cero, uniformemente, en K.

c) ¿Existe algún $U \subset \Omega$, no acotado, tal que $f_n(z)$ converja a 0 uniformemente en U?

Solución. Convergencia puntual: para cada $z \neq 1$ fijo

$$\forall\ z \neq 1, \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-z)} = 0$$

Pero la convergencia no es uniforme en Ω pues elijamos

$$\boxed{z_n = 1 - \frac{1}{n}}$$

entonces

$$f_n(z_n) = \frac{1}{n(1-z_n)} = \frac{1}{n(1-1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\frac{1}{n}} = 1 \ \forall n$$

luego

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-z_n)} = 1 \neq 0 \ \checkmark}$$

b) • Sea $K \subset \Omega$ cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, entonces $1 \notin K$ y $h(z) = \dfrac{1}{1-z}$ está acotada en K pues es continua, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\boxed{\frac{1}{1-z} < M \ \forall z \in K}$$

• Dado $\epsilon > 0$, sea $N > \frac{M}{\epsilon}$, luego para todo $n > N$ y cualquier $z \in K$:

$$\boxed{|f_n(z)| = \frac{1}{n\,|1-z|} < \frac{1}{N}\,M < \frac{\epsilon}{M}M \leq \epsilon \ \checkmark}$$

c) Vimos que es suficiente que $\boxed{h(z) = \dfrac{1}{1-z} \text{ sea acotado en la región}}$ donde queremos probar la convergencia uniforme, es decir, sea $R > 0$ y

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > R\} \text{ ó también } \overline{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq R\}$$

Veamos que $f_n \to 0$ uniformemente en U:

• $z \in U \Rightarrow |1-z| > R$ entonces $\boxed{h(z) := \left|\dfrac{1}{1-z}\right| = \dfrac{1}{|1-z|} < \dfrac{1}{R}}$, es decir, $h(z)$ está acotada en U.

• Dado $\epsilon > 0$, sea $N > \frac{1}{R\epsilon}$, luego para todo $n > N$ tenemos

$$\boxed{\forall z \in U,\ |f_n(z)| = \frac{1}{n\,|1-z|} < \frac{1}{N}\frac{1}{R} < \frac{R\epsilon}{R} \leq \epsilon \ \checkmark}$$

Criterios de Convergencia de Series

Criterio de Leibnitz: Dada la sucesión de números positivos $\{c_n\}$, monótona decreciente, la serie alternada:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n \text{ es convergente } \checkmark}$$

Ejemplos: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ y también $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ son series convergentes por el Criterio de Leibnitz.

Criterio de D ' Alembert: Dada la sucesión de números $\{a_n\}$, consideremos el límite:

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_{n+1}|}$$

entonces

- Si $L < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si $L = 1$, el criterio no permite decidir sobre la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Criterio de Cauhcy: Las mismas conclusiones valen si tomamos el límite

$$\boxed{L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Criterio de Comparación: Dadas dos series de términos no negativos $\sum a_n$, $\sum b_n$, consideremos los límites:

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Entonces si

- Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge
- Si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge
- Si $L > 0$ entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge $\checkmark$

SERIE p: La serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$

Ejercicio Adicional 4. Analizar la convergencia de las sgtes series

a) $\sum \frac{e^n}{n!n^n}$ b) $S = \sum \left(\frac{n^2+3i}{4n^2+2}\right)^n$

Solución:

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n}{n!n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$$

entonces la serie $\sum \frac{e^n}{n!n^n}$ es convergente ✓

b) La serie $S = \sum \left(\frac{n^2+3i}{4n^2+2}\right)^n$ es convergente por el Criterio de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2+3i}{4n^2+2}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+3i}{4n^2+2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left|\frac{1+\dfrac{3i}{n^2}}{1+\dfrac{1}{2n^2}}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

entonces la serie es convergente ✓

Lema: Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ✓

SERIES DE POTENCIAS

LA SERIE GEOMÉTRICA converge absolutamente en el disco unidad y diverge fuera de él:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall |z| < 1 \checkmark$$

Sigue la cuenta de comprobación.

RADIO DE CONVERGENCIA

Se puede calcular también como

$$R = \frac{1}{\ell}$$

donde

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n}$$

Ó bien como

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \text{superior} \sqrt[n]{|a_n|}$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA: Si el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es $R > 0$ entonces

$\boxed{\text{la serie converge absolutamente en el disco abierto centrado en } z_0 \text{ de radio } R}$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

Además, la serie
$\boxed{\text{converge uniformemente en todo disco cerrado de radio menor con centro en } z_0}$
es decir, en cualquier

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} : \ r < R. \checkmark$$

Ejercicio Adicional 5. La región de convergencia de la serie de Taylor de $f(z) = e^z$ centrada en $z = 0$ es $\mathbb{C}$:

$$\boxed{f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}$$

En efecto, por D ´Alembert, se obtiene $R = +\infty$:

$$R = \frac{1}{\ell} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$$

Ejercicio Adicional 6. La región de convergencia de la serie $f(z) = \sum n! z^n$ es un solo punto, es decir, $\mathcal{D} = \{z = 0\}$, por D ´Alembert, se obtiene $\ell = +\infty$, luego $R = 0$:

$$R = \frac{1}{\ell} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

Ejercicio Adicional 7. La región de convergencia de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2!}$ es el disco unidad abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Atención: Ojo con la notación de $f(z)$ que tiene sentido sólo dentro de la región de convergencia.

Entendamos primero que esta serie tiene muchos coeficientes iguales a cero, es decir:

$$a_k = \begin{cases} 1: & k = n^2! \quad \text{para algún } n \\ \\ 0: & k \neq n^2! \end{cases}$$

No se puede calcular $R = \dfrac{1}{\ell}$ pues hay infinitos $a_n = 0$ y tampoco existe el $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Pero podemos calcular $R = \dfrac{1}{\ell}$ por el criterio de Cauchy el límite superior:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Recordemos la definición: Dada una sucesión $\{X_n\} \subset \mathbb{R}$, se define el límite superior como el límite de los supremos en la forma sgte:

$$\lim_{n\to\infty} Superior \ \{X_n\} := \lim_{n\to\infty} \{Supremo \ X_m : m \geq n\}$$

En este caso, tenemos

$$\ell = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} Sup \sqrt[n]{a_{n^2!}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Convergencia en el borde: la serie diverge para todo $|z| = 1$, por lo tanto, la región de convergencia es

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Criterio de Dirichlet: Sea la serie $\sum_n b_n w_n$ donde

- la sucesión $\{b_n\}_n \subset [0, +\infty)$ es decreciente y tal que $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$
- Existe un $M > 0$ tal que para todo n se tiene

$$|\sum_{k=0}^{k=n} w_k| \leq M$$

Entonces la serie $\sum_n b_n w_n$ converge ✓

Criterio de Dirichlet para la Convergencia Uniforme de Funciones

(Sirve para el ejercicio 9.)

Sea la serie $\sum_n f_n(z) g_n(z)$ donde $f_n,\ g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$, tales que:

- la sucesión $\{g_n\}_n$ es decreciente y converge uniformemente a $g(z) = 0$ en Ω, $g_n(z) \in [0, +\infty)\ \forall z$.
- Existe un $M > 0$ tal que para todo n se tiene, independientemente de n y de z:

$$|\sum_{k=0}^{k=n} f_k(z)| \leq M$$

Entonces la serie $\sum_n f_n(z) g_n(z)$ converge uniformemente en Ω. ✓

Lema: La convergencia absoluta implica la convergencia condicional

Ejercicio Adicional 8. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de la serie de potencias $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}(z+3i)^n$.

- Veamos que $R = 1$ pues $R = \frac{1}{\ell}$ donde: $\boxed{\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1}$

  Por lo tanto, obtenemos que

- La serie converge absolutamente en el disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+3i| < 1\}$.

- La serie diverge en la región $\{z \in \mathbb{C} : |z+3i| > 1\}$.

- Veamos que la serie no converge de forma absoluta en el borde: si $|z+3i| = 1$ entonces

$$\sum_n \frac{|(-1)^n|}{n+1}|z+3i|^n = \sum_n \frac{1}{n+1} = +\infty$$

- Convergencia condicional en el borde: Si $|z+3i| = 1$ entonces $z+3i = e^{it}$, luego, por el criterio de Dirichlet para $e^{it} \neq -1$:

$$\boxed{\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} e^{nti} \text{ es convergente}}$$

  pues

  - La sucesión $\left\{b_n = \frac{1}{n+1}\right\}_n \subset [0, +\infty)$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
  - Existe $M > 0$ (que no depende de n) tal que para todo n se tiene

$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k e^{kti}\right|} = \left|\sum_{k=0}^{k=n} (-e^{it})^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{k=n} \omega^k\right| = \left|\frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}\right|$$

$$\boxed{= \left|\frac{1-(e^{it})^{n+1}}{1-(-e^{it})}\right| \leq \frac{2}{|1+e^{it}|} := M(t) \qquad \forall z+3i \neq -1}$$

  Entonces

$$\boxed{\text{la serie } \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} e^{nti} \text{ converge condicionalmente } \forall z+3i = e^{it} \text{ si } t \neq \pi + 2k\pi}$$

  es decir, para todo $|z+3i| = 1$, pero $z+3i \neq -1$.

- La serie diverge para $z = -3i - 1$ pues en ese caso se tiene $\sum_n \frac{1}{n+1} = +\infty$ ✓

Ejercicio Adicional 9. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de la serie de potencias

$$\sum_n \frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^n$$

- Consideremos la serie $\sum_n \frac{1}{n^2} w^n$ con $w := \frac{z}{z+1}$
- Veamos que $R = 1$ pues $R = \frac{1}{\ell}$ donde:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Por lo tanto, tenemos

- La serie converge $|w| < 1$
- La serie diverge $|w| > 1$
- Para w en el borde $\Rightarrow |w| = 1$, se tiene la serie absolutamente convergente

$$\sum_n \frac{1}{n^2}|w|^n = \sum_n \frac{1}{n^2}$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente en el borde para la variable w, es decir, $|w| = 1$.

- Para la variable z recordemos que $w := \frac{z}{z+1}$ es la transformada inversa de $H(z) = \frac{z}{z+1}$

$$w = H(z) = \frac{z}{z+1} \Leftrightarrow (z+1)w = z \Leftrightarrow z(w-1) = w \Leftrightarrow z = \frac{w}{w-1} =: G(w)$$

Transformemos primero puntos de la circunferencia unidad por $G(w) = \frac{w}{w-1}$:

- $G(1) = \infty$ por lo cual G lleva la circunferencia unidad $\to$ a una recta
- $G(-1) = -\frac{1}{2}$
- $G(i) = \frac{i}{i-1} = \frac{-1+i}{2}$

Por lo tanto, $G(w) = \dfrac{w}{w-1}$ lleva la circunferencia unidad a la recta vertical $= -\dfrac{1}{2}$. Como además manda $G(0) = 0$, obtenemos que G lleva el disco unidad en el semiplano que se encuentra a la derecha de la recta $y = -\dfrac{1}{2}$.

Concluímos que la serie original

- Converge absolutamente en la región $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}$.
- Diverge en la región $\Omega^c = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$.

Ejercicio Adicional 10. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_n \dfrac{e^{inz}}{\sqrt{n}+3}$

Solución: estudiar para $w = e^{inz}$ y volver al final a la variable z.