Práctica 11

Series

Los procesos infinitos que hemos usado para desarrollar este curso fueron evitados históricamente desde los griegos hasta el siglo XVII. Incluso el mismo cálculo diferencial e integral fue resistido por filósofos y matemáticos durante largo tiempo hasta que Cauchy y otros matemáticos le dieran forma y justificación plena.

Paradójicamente, esta última unidad que se ocupa del estudio de sumas infinitas, es precisamente por donde empezaron los padres del cálculo sus descubrimientos en matemática. Tanto Newton como Leibniz se aproximaron a la matemática estudiando series infinitas.

Los primeros descubrimientos de Newton, con 23 años de edad, se derivan de su habilidad para expresar funciones en términos de sumas infinitas. Escribió Newton "*todo lo que el álgebra hace por medio de una cantidad finita de ecuaciones, se puede conseguir por medio de infinitas ecuaciones… pues el razonamiento en este caso no es menos seguro que en el otro*".

Por su parte, Leibniz, desafiado por el físico Huygens, estudia diversas series numéricas, tal como veremos en la introducción.

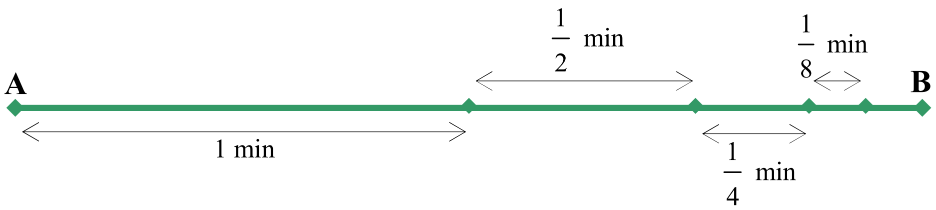
1. Introducción. Tres paradojas

1.1 Primera. Zenón de Elea

La doctrina pitagórica de que los "números constituyen el mundo entero" era resistida por otras corrientes filosóficas. Entre ellos se encontraba Zenón de Elea que formuló una colección de paradojas para refutar las teorías de los seguidores de Pitágoras.

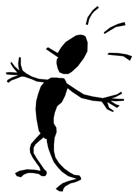
En una de sus paradojas, Zenón, discípulo de Parménides, nos "demuestra" que el movimiento es imposible y que es sólo una percepción de los sentidos. El razonamiento de Zenón era el siguiente:

Supongamos que queremos ir del punto **A** al punto **B** a velocidad constante. Supongamos también que cuando llegamos a la mitad de camino ha transcurrido un minuto.



Para recorrer la mitad del camino restante, necesitaremos $\frac{1}{2}$ minuto, desde allí hasta la mitad del camino restante tardaremos $\frac{1}{4}$ de minuto y así hasta el infinito. De modo que el tiempo total T que necesitamos para ir de **A** hasta **B** se obtiene sumando todos estos tiempos parciales:

$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$



Afirmaba Zenón que la suma infinita de tiempos daba infinito y por lo tanto era imposible ir de **A** hasta **B**. Luego el movimiento no existe.

Tratando de retrucar a Zenón

Hagamos una cuenta con la suma T sacando factor común a partir del segundo término de la suma:

$$T = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots\right)}_{T} = 1 + \frac{1}{2}T$$

Entonces

$$T = 1 + \frac{1}{2}T \Rightarrow T = 2$$

Mediante esta cuenta deducimos lo que parece (y es) obvio: si tardamos 1 minuto para recorrer la mitad del camino tardamos 2 minutos para recorrerlo todo. ¿Será que la afirmación de Zenón de que sumar infinitos términos positivos es necesariamente infinito, no es verdad?

Veamos la segunda paradoja, que lejos de aclarar, oscurece…

1.2 Segunda. El origen del Ajedrez y un final inesperado

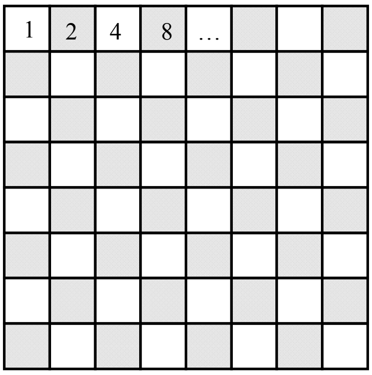
La leyenda sobre el origen del ajedrez está en muchos libros y sitios de Internet. Uno de ellos es titulado *El hombre que Calculaba* de Malba Tahan (es un seudónimo). Lo que sigue es un resumen muy apretado de esta leyenda.

La historia ocurre hace miles de años en un reino de la India, donde gobernaba el príncipe Iadava, sabio y generoso.

Debido a una guerra fronteriza en la que resulta victorioso, pierde a su hijo en la batalla final y cae en una profunda depresión que lo lleva a abandonar las cuestiones de gobierno, poniendo al reino en grave crisis.

Desde los confines del reino un brahmán de nombre Sessa, acerca al palacio de Iadava un regalo que no era otro que el juego del ajedrez. Aprendidas las reglas de juego, el príncipe se volvió rápidamente un excelente jugador.

En una de las partidas que juega con uno de sus cortesanos, descubre que se ha reproducido en el tablero la batalla final donde perdió a su hijo y que para ganar la partida debe sacrificar a un alfil de la misma forma que su hijo se sacrificó para salvar al reino.

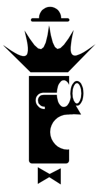


Empezando a poner granos en el tablero

El príncipe agradece a Sessa por el regalo y por hacerle comprender que para salvar a un reino hay que estar dispuesto a hacer grandes sacrificios. Le dice a Sessa que pida lo que quiera en recompensa.

El brahmán le da una última lección de humildad. Le pide una cantidad de granos de trigo que deberá determinar colocando un grano en el primer casillero del tablero de ajedrez, dos granos en el siguiente, cuatro granos en el siguiente, y así siguiendo, siempre duplicando la cantidad de granos hasta completar los 64 casilleros del tablero. Para contarlos los ministros del príncipe tuvieron que calcular la suma

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$



El resultado de esta suma es un número enorme:

18.446.744.073.709.551.615 granos.

Los contadores del príncipe concluyeron que sembrados todos los campos de la India no darían en muchos años la cantidad de trigo requerido por Sessa.

Aquí termina la historia del ajedrez. Pero el matemático español Miguel de Guzmán imagina en uno de sus libros de texto otro final para esta historia.

Molesto el príncipe por el papelón que Sessa le hiciera pasar delante de sus ministros, le dijo que para demostrarle lo generoso que era no solo estaba dispuesto a darle la cantidad de granos requerida sino que le iba a dar mucho más:

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64} + \dots.$$

Para calcular esta suma infinita seguimos la misma estrategia que usamos en el caso de Zenón:

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64} + \dots = 1 + 2\underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + \dots)}_{G}$$

Nos queda la ecuación:

$$G = 1 + 2G \Rightarrow G = -1$$

El príncipe Iadava, triunfante le dice a Sessa:

¡Me debés un grano!

¿Qué pasó?

¿Por qué la misma cuenta que nos dejó tranquilos con la paradoja de Zenón, nos da un resultado absurdo en este caso? ¿Será que Zenón algo de razón tenía?

Volveremos a esta perplejidad un rato nomás.

1.3 Tercera. El descuido de Leibniz

Como ya sabemos Leibniz y Newton son los héroes de nuestro curso por ser los padres del cálculo diferencial e integral. Curiosamente como dijimos al comienzo ambos comenzaron su actividad en la matemática resolviendo cuestiones vinculadas a sumas infinitas.

Leibniz calculó con gran habilidad la suma de los inversos de los números triangulares. Es decir

$$S=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{k(k+1)}+...=2(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...)$$

Para ello observó que cada término se puede escribir como

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ ,...,\ \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Entonces reemplazando cada término obtuvo (dividiendo por 2)

$$\frac{S}{2}=(1\cancel{-\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{4}})\cancel{+}...\cancel{+}(\cancel{\frac{1}{k}}\cancel{-\frac{1}{k+1}})+...$$

Observando que a partir del segundo término cada uno se cancelaba con el siguiente, solo quedaba sin cancelar el primer término de la suma. Así

$$\frac{S}{2}=1\Rightarrow S=2$$

Este resultado llenó de entusiasmo a Leibniz y lo llevó a calcular la siguiente suma

$$L=1-1+1-1+1-....$$

Usando la misma estrategia que nosotros, tanto en la paradoja de Zenón para calcular el tiempo como en la leyenda del ajedrez para contar los granos, obtuvo:

$$L=1-1+1-1+1-....=1-(1-1+1-1+...)=1-L$$

Es decir $L=1-L\ \Rightarrow\ L=\frac{1}{2}$.

Sin embargo, podría haber hecho, entre otras cosas, lo siguiente:

$$L=(1-1)+(1-1)+(1-1)+....=0$$

Otra vez estamos ante una paradoja.

Estas tres cuestiones hacen pensar que las sumas infinitas, en principio, no pueden manipularse con la aritmética habitual sin que tengamos bien definido qué significan.

2. Series numéricas

Sea $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ una sucesión de números reales. Construimos a partir de ella una nueva sucesión, que llamaremos ***sumas parciales***, de la siguiente manera:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Definición. Diremos que la ***serie de término general*** a_n ***es convergente*** si la sucesión de sumas parciales tiene un límite finito, es decir, si existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$.

En tal caso escribimos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y decimos que S es la suma de la serie. En otro caso diremos que la ***serie diverge.***

A veces, si la serie converge, pondremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Si, en cambio, diverge, pondremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

La serie telescópica de Leibniz.

Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución

Siguiendo la idea de Leibniz, ahora con la definición de series a mano, calculamos las sumas parciales:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$$

……..

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Observación: Esta serie la podemos también escribir en la forma $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Así la usaremos en un momento más.

Hallar la suma de una serie no es tarea sencilla. Nos proponemos simplemente determinar si una serie es convergente o no. Para ello nos tenemos que hacer de una “agenda” de series de las cuáles sepamos si son o no convergentes para que, comparando con ellas, podamos determinar la convergencia o no de nuevas series. Las series geométricas y las series *p* que damos a continuación apuntan a este objetivo.

2.1 Series geométricas

Vamos a estudiar una familia de series que jugarán un papel importante en lo que sigue.

Para cada $r \in \mathbb{R}$, consideramos la ***serie geométrica***

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$$

Para calcular la suma parcial de orden *n* hacemos $S_n - rS_n$ ya que se cancelan casi todos los términos. Al parámetro *r* se lo llama ***razón*** de la serie geométrica:

$$\begin{array}{rl} & S_n = 1 + r + r^2 + \ldots\ldots + r^{n-2} + r^{n-1} \\ - & rS_n = \quad r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots\ldots + r^{n-1} + r^n \\ \hline & S_n - rS_n = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots. + 0 + \ldots + 0 - r^n \end{array}$$

Es decir

$$(1-r)S_n = 1-r^n$$

Si $r \neq 1$ obtenemos una expresión sintética de la suma parcial de orden n

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$$

La serie geométrica es convergente si la suma parcial tiene límite finito. Se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \text{si } |r|<1 \\ \infty & \text{si } |r|>1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r^n \to 0 \text{ si } |r|<1 \\ r^n \to \infty \text{ si } |r|>1 \end{array}}$$

Tenemos entonces que la serie geométrica converge para $-1<r<1$ y su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad , \quad -1<r<1$$

Nos falta estudiar los casos $r=1$ y $r=-1$.

- Caso $r=1$

$$S_n = 1+1+...+1 = n$$

Es claro que $S_n = n \to +\infty$.

Entonces la sucesión de sumas parciales no converge a un límite finito. La serie en este caso es divergente.

- Caso $r=-1$

$$S_1 = 1 \ , \ S_2 = 1-1=0 \ , \ S_3 = 1-1+1=1 \ , \ S_4 = 1-1+1-1=0 \ \ldots$$

En general

$$S_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ impar} \\ 0 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$$

La sucesión de sumas parciales no tiene límite, por lo que la serie es divergente también en este caso. En síntesis

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverge si } |r| \geq 1$$

2.2 La resolución de las tres paradojas

Las series geométricas nos dan las respuestas a las tres paradojas planteadas al comienzo

Primera. Zenón y el movimiento

La serie $T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Para este valor obtuvimos que la serie es convergente y su suma es igual a $T = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Zenón se equivocaba cuando afirmaba que sumar infinitos números es infinito.

Segunda. La leyenda del ajedrez

La cantidad de granos que el príncipe quería entregarle a Sessa es la serie geométrica de razón $r = 2$

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + ...$$

que vimos que es divergente.

El cálculo del príncipe era falaz y la ecuación $G = 1 + 2G$ no tiene sentido porque G no es un número.

Tercera. El descuido de Leibniz

La serie $L = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ que a Leibniz le dio como suma $\frac{1}{2}$ es la serie geométrica de razón $r = -1$ que acabamos de ver que es divergente.

Esto explica el error del genio. Le faltaba una buena definición de suma infinita.

Se pueden hacer los ejercicios del 1 al 5 de la Práctica.

2.3 La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Otra familia de series que servirán como "testigos" para comparar con series que querramos estudiar son las llamadas ***series p***. Para cada $p > 0$, se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Veremos, en términos de p, cuándo esta serie converge y cuándo diverge. Por ahora , estudiemos el caso $p=1$.

Los términos de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ son todos positivos. Zenón sospecharía de ella. ¿Tendría razón en este caso?

Consideremos las sumas parciales de 1 término, de 3 términos, de 7 términos,…de 2^n-1 términos y agrupemos tales términos de a uno, después de a dos, después de a cuatro y así hasta terminar con ellos:

$$S_1=1 \quad , \quad S_3=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \quad , \quad S_7=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$$

$$S_{2^n-1}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots+\left(\ldots+\frac{1}{2^n-1}\right)$$

Observemos que

$$1>\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ \ldots$$

Es decir $S_{2^n-1}>\frac{1}{2}n\to+\infty$. Al ser una serie de términos positivos, sus sumas parciales son crecientes (cada vez que agrego un término, la suma parcial es mayor). Luego

La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

2.4 Propiedades de linealidad

Las series heredan de la noción de límite las propiedades de linealidad. Esto es:

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son convergentes entonces vale:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Ejercicio. Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{6^n}$

Solución

Escribimos el término general como suma de dos potencias

$$\frac{2^n+5^n}{6^n}=\frac{2^n}{6^n}+\frac{5^n}{6^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{5^n}{6^n}$$

Observemos que cada término deviene en una serie geométrica de la cual sabemos calcular su suma. Usamos la linealidad para escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Solo nos queda calcular cada una de las series geométricas que nos han quedado. Hay una sutileza: las sumas comienzan desde $n=1$ y los cálculos generales que hicimos precedentemente fueron desde $n=0$. Tenemos que atender a esta sutileza en el cálculo, sumando y restando el término correspondiente a $n=0$.

La primera serie geométrica es de razón $r=\dfrac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-1=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

Sumamos desde $n = 0$
y lo volvemos a restar

La segunda serie geométrica es de razón $r=\dfrac{5}{6}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n-1=\frac{1}{1-\frac{5}{6}}-1=6-1=5$$

Entonces

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{6^n}=\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}}$$

2.5 Una condición necesaria

Si bien vimos que Zenón se equivocaba cuando decía que suma infinita de números positivos debe dar infinito, el ejemplo de la serie armónica nos hace pensar que algo de razón lo asistía. El término general no puede comportarse de cualquier manera. El siguiente teorema arrima un poco de luz a esta cuestión.

Teorema. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración

Si la serie converge existe $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Además $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no es cierto que la serie sea convergente, como lo muestra el ejemplo de la serie armónica.

Esta condición necesaria es útil en su versión "negativa". Es decir:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ <u>no es cero</u> entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Esta formulación es la que usaremos en la práctica

Ejercicio. Dadas las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, decidir si es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{100n+1}+\frac{1}{5^n}\right)$$

Solución

Observemos que el término general de la primera serie no tiende a cero. Veamos que con eso nos alcanza para decidir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{100n+1}+\frac{1}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{100}+0 = \frac{1}{100}$$

Como el término general no tiende a cero y eso es condición necesaria para que la serie sea convergente, resulta divergente.

3. Series de términos positivos

3.1 Criterios de comparación

Las series de términos positivos son más fáciles de estudiar por el siguiente hecho que conocemos de las sucesiones:

Si $a_n \geq 0$ entonces la sucesión de sumas parciales es creciente:

$$S_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Por lo tanto, para que la serie sea convergente bastará con que las sumas parciales estén acotadas superiormente, ya que una sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite finito.

En base a esta idea daremos criterios de convergencia y divergencia de series, comparando series desconocidas con series conocidas.

En lo que sigue y hasta nuevo aviso, todas las series serán de términos no negativos. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será la serie a estudiar. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ será una serie convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ será una serie divergente.

3.2 Primer criterio de comparación

Primer criterio de comparación

(a) Si $a_n \leq c_n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(b) Si $a_n \geq d_n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La desigualdad alcanza que sea cierta desde un n en adelante.

Demostración

(a) No hay mucho que decir:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_n = C_n$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente resulta que C_n tiene límite y por lo tanto está acotada. Luego S_n también está acotada y como dijimos, con eso alcanza para asegurar que tiene límite.

Ejemplos. Más sobre series *p*. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Prueba

Recordemos que la serie telescópica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ es convergente y que es evidente que $n^2 > n^2 - n = n(n-1)$.

Entonces

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = c_n \quad \text{para } n \geq 2 .$$

Luego, usando el criterio de comparación precedente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p \geq 2$ es convergente.

Prueba

Misma idea: $n^p \geq n^2$ si $p \geq 2$. Entonces

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} = c_n$$

Entonces, el criterio de comparación nos asegura que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente si } p \geq 2 .$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $0 < p \leq 1$ es divergente.

Prueba

Misma idea: $n^p \leq n$ si $0 < p \leq 1$. Entonces

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} = d_n \text{ asociada a una serie divergente.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente si $0 < p \leq 1$.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente porque $p = \frac{1}{2} < 1$.

Nos queda por saber qué pasa cuando $1 < p < 2$. Paciencia.

3.3 Criterios de comparación con paso al límite

Criterio de comparación con paso al límite

(a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = l \in [0,+\infty)$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = l \in (0,+\infty)$ ó $l = +\infty$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración

(a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = l \in [0,+\infty)$ entonces la sucesión está acotada. Es decir

$$\frac{a_n}{c_n} \le k \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a_n \le kc_n$$

En virtud de las propiedades de linealidad la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} kc_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente. Entonces por el criterio de comparación también lo es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = l \in (0,+\infty)$, por conservación de signo $\frac{a_n}{c_n} \ge k > 0$. Esto también es cierto si $l = +\infty$. Entonces $a_n \ge kd_n$. Entonces, por el criterio de comparación $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente al igual que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} kd_n$.

Por qué $l \neq 0$ en (b)

$a_n = \frac{1}{n^2}$ (convergente)

$d_n = \frac{1}{n}$ (divergente)

$\frac{a_n}{d_n} = \frac{1}{n} \to 0$. El criterio no sirve en este caso

Ejercicio. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+n+2}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{2n+2011}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^4+1}}$

Soluciones

(1) Un análisis heurísitco nos dice que $\dfrac{3n}{n^3+n+2}$ se comporta como $\dfrac{1}{n^2}$ que deviene en una serie convergente (serie p con $p=2>1$). Comparamos pasando al límite para confirmar esto:

$$\frac{\dfrac{3n}{n^3+n+2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{3n^3}{n^3+n+2}\to 3$$

Entonces, como $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge, la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{n^3+n+2} \text{ converge}}$.

(2) Aquí, el análisis intuitivo nos dice que $\dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+2011}$ se parece a $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ que deviene en una serie divergente.

Otra vez comparamos pasando al límite:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+2011}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{n+2\sqrt{n}}{2n+2011\sqrt{n}}\to\frac{1}{2}(\neq 0)$$

Entonces la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+2011} \text{ es divergente}}$.

(3) Aquí, si bien se puede aplicar el criterio de comparación de paso al límite, vemos que el término general no tiende a cero:

$$\frac{n^2+1}{10n^2+5n+3}\to\frac{1}{10}\neq 0$$

Entonces la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{10n^2+5n+3} \text{ es divergente}}$.

(4) El análisis previo nos dice que $\dfrac{n}{n^4+1}$ se parece a $\dfrac{1}{n^3}$ por lo que $\sqrt[3]{\dfrac{n}{n^4+1}}$ se parecerá a $\dfrac{1}{n}$ que deviene en la serie armónica, divergente. Comparamos pasando al limite:

$$\frac{\sqrt[3]{\dfrac{n}{n^4+1}}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+1}}=\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4+1}}=\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+1}}\to 1(\neq 0)$$

Entonces la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n}{n^4+1}} \text{ es divergente}}$.

Es un buen momento para hacer el ejercicio 6 de la Práctica.

3.4 Criterio integral de Cauchy

Tenemos pendiente el estudio de las series p con $1 < p < 2$. Introducimos un criterio de convergencia que Cauchy ideó para resolver justamente esta cuestión, aunque será útil en otros casos.

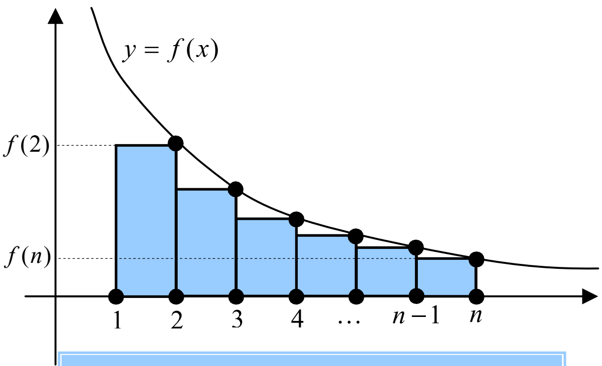
Teorema: Sea $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y decreciente (por lo tanto integrable en cualquier intervalo de su dominio). Entonces, las sucesiones $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ e $I_n = \int_1^n f(x)dx$ tienen el mismo comportamiento.

Es decir, o ambas convergen o ambas divergen.

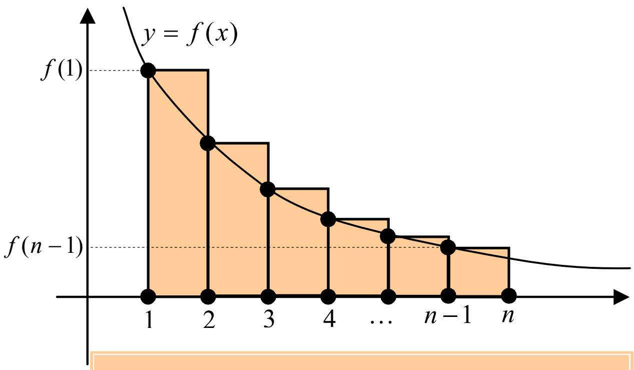
Piense, como lo hizo Cauchy, en $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$

Demostración (idea de)

Nos apoyamos en las dos figuras que lo dicen casi todo:



$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \le \int_1^n f(x)dx$$



$$\int_1^n f(x)dx \le f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

En términos de S_n e I_n estas desigualdades se traducen en

$$S_n - f(1) \le I_n \le S_{n-1}$$

Si I_n está acotado, también lo está S_n

Si S_n está acotado, también lo está I_n

Teniendo en cuenta que las dos sucesiones son crecientes, para que sean convergentes, basta que estén acotadas. De estas dos desigualdades se deduce que:

Si I_n tiene límite, entonces está acotada, entonces, mirando la desigualdad izquierda, también está acotada S_n, con lo cual resulta convergente.

Recíprocamente, si S_n tiene límite, S_{n-1} resulta acotada, con lo cual, mirando la desigualdad de la derecha, también está acotada I_n, concluyendo entonces que es convergente.

3.5 Completando el análisis de las series p

Veamos cómo actúa este criterio integral cuando lo aplicamos a la función positiva y decreciente $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$. El criterio nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ será convergente si y sólo si existe el

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \triangleq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

Se la llama ***integral impropia***

Calculamos para $p\neq 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty}$

Al aplicar la regla de Barrow, el límite sólo existe si $-p+1>0$ y vale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{p-1}$. Es decir que, según el criterio integral, la serie p converge sólo si $p>1$. En otro caso, es divergente.

Si bien el caso $p=1$ ya lo hemos resuelto "a mano", el criterio integral también nos entrega una nueva prueba de que la serie es divergente en este caso:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty \text{ entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Teorema. La serie p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p>1$.

Ejercicio. Estudiar la convergencia de las series

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

Soluciones

(1) Usamos el criterio integral:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$$

. Entonces la serie es divergente.

Sustitución:

$$t=\ln x \;\Rightarrow\; dt=\frac{dx}{x}$$

(2) Nuevamente usamos el criterio integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt=-te^{-t}-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1$$

Sustitución:

$$t=\ln x \;\Rightarrow\; dt=\frac{dx}{x}$$

$$x=1 \Rightarrow t=0$$

$$x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$$

Partes:

$$u=t \Rightarrow du=dt$$

$$dv=e^{-t}dt \Rightarrow v=-e^{-t}$$

Luego la serie $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\text{ es convergente}}$.

Se puede hacer el ejercicio 7 de la práctica.

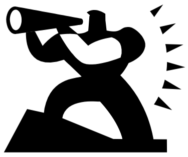
Hacia dónde vamos

Representar funciones como suma de funciones más sencillas es un objetivo del cálculo.

El Polinomio de Taylor es un paso en ese sentido.

Ahora pretendemos saber para qué valores de x una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ representa a una función $f(x)$

Notar que cuando x toma valores negativos el signo de x^n va *alternando* de positivo a negativo



4. Series Alternadas. Criterio de Leibniz

Será de interés para lo que sigue estudiar las series de la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0$$

Las series de esta forma se llaman ***series alternadas***. También se consideran series alternadas las de la forma

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Un criterio descubierto por Leibniz será nuestra herramienta para estudiar estas series

Teorema. Criterio de Leibniz. Sea $a_n \geq 0$. Si se cumplen las dos condiciones

- a_n es decreciente.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es convergente.

Demostración

La idea es probar que las sumas parciales S_n tienen límite finito. Para ello estudiamos las subsucesiones S_{2n} y S_{2n+1}. Alcanzará con que ambas tengan el mismo límite finito.

A las sumas parciales de orden par se las puede escribir como:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Son todos no negativos

Cada término (entre paréntesis) es mayor o igual a cero pues la sucesión es decreciente. Es decir que la sucesión S_{2n} resulta creciente (suma de términos positivos)

También se las puede escribir como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Son todos negativos

Cada término, salvo el primero, es menor o igual a cero otra vez porque la sucesión es decreciente. Entonces

$$S_{2n} \le a_1$$

Entonces la sucesión S_{2n} es creciente y acotada superiormente. Se concluye que existe

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Las sumas parciales de orden impar están relacionadas con las de orden par:

$$S_{2n+1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

Tomando límite en ambos miembros (sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ y la serie resulta convergente □

Ejercicio. Decidir sobre la convergencia o no de las series alternadas.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ***serie armónica alternada***

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(n+2)}{n+3}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{n^2+1}$

Soluciones

(1) Aplicando el Criterio de Leibniz es inmediato, pues

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0 \text{ (tiende a cero en forma decreciente)}$$

(2) En este caso

$$\frac{(-1)^n (n+2)}{n+3}$$

Oscila. En valor absoluto tiende a 1

no tiende a cero. Luego, por la condición necesaria, la serie es divergente.

(3) Aplicamos otra vez el crierio de Leibniz a $a_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Es inmediato que $a_n = \frac{n}{n^2+1} \to 0$. Menos evidente es que a_n es decreciente. Veamos esto de dos formas diferentes:

<u>Una forma:</u> desde la definición de decreciente: hay que probar que $a_{n+1} < a_n$. Es decir $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$. Haciendo la cuenta, esta desigualdad es equivalente a probar que

$$n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

o bien, la evidente desigualdad

$$1 < n^2 + n$$

<u>Otra forma</u>: Probar que la función asociada al término general $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ es decreciente si $x \geq 1$ (con esto alcanza y sobra para ver que $g(n) = a_n$ es decreciente). Para ver que g es decreciente, calculamos su derivada y estudiamos su signo (Teorema del Valor Medio)

$$g'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$

Con lo cual g es decreciente.

Luego a_n es decreciente y tiende a cero. El criterio de Leibniz nos asegura que la serie es convergente.

5. Convergencia absoluta y condicional

Damos dos nuevas definiciones y un teorema que las relaciona.

Convergencia absoluta: Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge absolutamente*** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Convergencia condicional: Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge condicionalmente*** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

Por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente.

La importancia de estos conceptos se ponen de manifiesto en el siguiente teorema

Teorema. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces converge.

Demostración

Sabemos por hipótesis que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente

La demostración se apoya en un hecho elemental

$$0 \le |a_n| + a_n \le 2|a_n|$$

La expresión $|a_n| + a_n$ es igual a 0
(cuando a_n es negativo)
o es igual a $2|a_n|$
(cuando a_n es positivo).

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ es de términos positivos y dominada (acotada) por una serie convergente. Por el criterio de comparación resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ es convergente. Pero entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede escribir como resta de dos series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

y por lo tanto resulta convergente.

Ejercicio. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

Solución

Estudiamos la convergencia absoluta de la serie.

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por comparación la serie resulta absolutamente convergente.

Por el teorema anterior, es convergente.

Se puede hacer los ejercicios 9 y 10 de la práctica, dejando el 8 para más adelante.

5.1 Importancia del Teorema

Supongamos tener una serie de potencias (ver *hacia dónde vamos*) de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, de la cual queremos saber para qué valores de x es convergente.

Los criterios establecidos para series de términos no negativos se podrán aplicar para la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$. De modo que si alguno de ellos nos permite decidir que esta serie converge también será convergente la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, gracias al teorema precedente.

5.2 Dos criterios de convergencia absoluta

Para estudiar un poco las series de potencias, damos dos criterios que aseguran convergencia absoluta y que ya hemos usado para convergencia de sucesiones.

En lo que sigue queremos estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sin ninguna restricción sobre el signo de a_n.

Criterio de la raíz enésima (Cauchy)

Criterio de la raíz enésima (Cauchy)

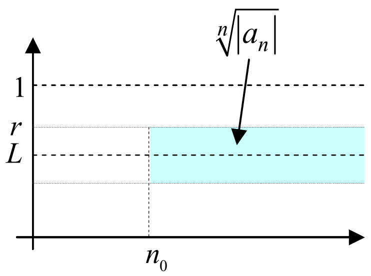
a. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

c. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = 1$ el criterio no sirve para decidir.

Demostración

Es casi un caso particular del criterio de comparación.



a. Si $L < 1$ entonces podemos afirmar que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1 \text{ para } n \geq n_0$$

Entonces

$$|a_n| < r^n$$

que genera una serie geométrica convergente. Entonces, por comparación, la serie converge absolutamente.

b. Si $L > 1$ entonces

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r > 1 \text{ para } n \geq n_0$$

Luego $|a_n| > r^n$. De modo que $|a_n| \to +\infty$ con lo cual la serie es divergente.

c. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente mientras que la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. En ambos casos, si aplicamos el criterio de la raíz obtenemos límite igual a 1. Esto muestra que el criterio no sirve en este caso para decidir sobre la convergencia de la serie.

Criterio del cociente (D´Alembert)

Criterio del cociente (D´Alembert)

a. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

c. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L = 1$ el criterio no sirve para decidir.

Demostración

Veamos el caso **a.** El caso **b**. es similar y para el caso **c.** sirven los mismos ejemplos que en el criterio de Cauchy..

Supongamos pues que $L < 1$. Al igual que en la otra demostración podemos afirmar que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$$

Usamos el criterio de comparación con un múltiplo de la serie geométrica convergente de término general $c_n = r^n$. Es decir, queremos mostrar que el cociente $b_n = \dfrac{|a_n|}{r^n}$. está acotado superiormente. Para ello, alcanza con ver que b_n es decreciente. Veamos eso pues

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}}\frac{r^n}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\frac{1}{r} < 1$$

Luego, b_n es decreciente y, por lo tanto, acotada superiormente por lo que

$$\frac{|a_n|}{r^n} < k$$

Es decir $|a_n| < kr^n$. Por el criterio de comparación se concluye que la serie es absolutamente convergente.

Ejercicio. Estudiar la convergencia de las series

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$

Soluciones

(1) El factorial se lleva mal con la raíz de modo que usaremos el criterio del cociente.

Para ello, armamos el cociente de D´Alembert para $a_n = \frac{2^n}{n!}$ y luego tomamos límite. Al resultado obtenido lo comparamos con 1.

Como $a_n > 0$ podemos omitir el módulo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$$

Entonces la serie es convergente.

(2) Otra vez, aplicamos el criterio del cociente, con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)(n+1)^n n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1} < 1$$

Como el límite del cociente de D´Alembert es menor que 1, la serie es convergente.

(3) En este caso, el criterio de la raíz es el más cómodo:

$$\sqrt[n]{8^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = 8\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to 8e^{-2} > 1$$

Como el límite resulta ser mayor que 1, el criterio asegura que la serie es divergente.

Ahora es el momento de hacer el ejercicio 8 de la práctica.

6. Series de potencias

La representación de funciones por medio de series de potencias es un capítulo en sí mismo de la matemática. Aquí sólo nos proponemos dar respuesta al siguiente problema

Problema. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? ¿Cuándo la convergencia es absoluta? ¿Cuándo es condicional?

Para atacar este problema seguiremos la siguiente estrategia:

1. Con los dos criterios para convergencia absoluta (el de la raíz enésima o el del cociente) determinamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde hay convergencia absoluta. Los mismos criterios nos dicen donde la serie diverge.
2. Para los puntos donde los criterios no deciden $(L = 1)$ usamos la colección de criterios de convergencia que estuvimos viendo (comparación, paso al límite, criterio integral y criterio de Leibniz)

Ejercicios. Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes. Establecer cuándo la convergencia es absoluta y cuándo es condicional

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n x^n}{n^2+1}$

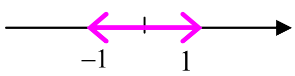
(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3 5^n}$

Soluciones

(1) Aplicamos el criterio de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \to |x|$$

El criterio nos asegura entonces que si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente y si $|x| > 1$ la serie diverge. El criterio es inútil cuando $|x| = 1$. Tenemos clasificados todos los números reales en puntos de convergencia o de divergencia, salvo los casos $x = -1$ y $x = 1$.



Intervalo de convergencia absoluta

Caso $x = -1$. Evaluamos la serie de potencias en este punto y obtenemos la serie numérica alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que ya vimos que es convergente (usando el Criterio de Leibniz)

Caso $x = 1$. En este caso la serie numérica resultante es la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que vimos (Criterio integral, por ejemplo) que es divergente.

En consecuencia, estamos en condiciones de dar una respuesta al problema:

En $-1 \le x < 1$ la serie converge, en cualquier otro punto es divergente. En $x = -1$ la convergencia es condicional, en $-1 < x < 1$, la convergencia es absoluta.

(2) Otra vez, el criterio de la raíz enésima parece adecuado:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n n x^n}{n^2+1}\right|} = \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}|x| \to 2|x|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{n} \to 1 \\ \sqrt[n]{n^2+1} \to 1 \end{array}}$$

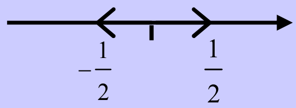
El criterio nos dice que para $2|x| < 1$ la serie converge absolutamente. El criterio también nos dice que para $2|x| > 1$ la serie diverge. Es decir

Para $|x| < \frac{1}{2}$ la serie converge absolutamente

Para $|x| > \frac{1}{2}$ la serie diverge

Nos queda por analizar los "bordes" del intervalo de convergencia: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

El valor $\frac{1}{2}$ es el llamado ***radio de convergencia***



Caso $x = \frac{1}{2}$. La serie resultante en este caso es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

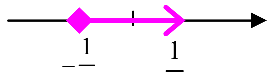
El término general "se parece" a $\frac{1}{n}$ que genera una serie divergente. Usamos comparación con paso al límite:

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \ne 0$$

Luego en $x = \frac{1}{2}$ la serie es divergente.

Caso $x = -\frac{1}{2}$. En este caso resulta la serie alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$$



Esta serie la estudiamos en oportunidad de ilustrar el Criterio de Leibniz. En ese momento probamos que $\frac{n}{n^2+1} \searrow 0$ (tiende a cero en forma decreciente). Entonces hay convergencia condicional en este punto. En síntesis la serie es convergente solo en $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

(3) El factorial no se lleva bien con el criterio de la raíz enésima. Aplicamos el criterio del cociente.

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

El criterio nos dice que la serie converge absolutamente para todo x. Abusando de la definición, decimos que el radio de convergencia es infinito.

No es difícil probar, vía el desarrollo de Taylor que vale la elegante fórmula

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(4) La serie está expresada en potencias de $(x-2)$.

Aplicamos el criterio de la raíz enésima

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(x-2)^n}{n^3 5^n} \right|} = \frac{|x-2|}{\sqrt[n]{n^3}\, 5} \to \frac{|x-2|}{5}$$

Entonces hay convergencia absoluta si $|x-2| < 5$ (5 es el radio de convergencia)

Para $|x-2| > 5$ el criterio nos asegura que la serie diverge.

Veamos qué pasa cuando $|x-2| = 5$. Es decir $x = -3$ o $x = 7$.

Si $x = 7$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ que acabamos de decir que es convergente.

Entonces la serie converge en el intervalo $[-3, 7]$ y en todos los valores la convergencia es absoluta.

Si $x = -3$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n^3 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Esta serie converge absolutamente porque $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| = \dfrac{1}{n^3}$ genera una serie p convergente.

Ejercicio. Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. Decidir si en $x=-2$, la serie es convergente.

Solución

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\left|x^{n+1}\right|\frac{(2n)!}{(n!)^2\left|x^n\right|} = \frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!\left|x\right|^n\left|x\right|}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2\left|x\right|^n}$$

Simplificamos los términos del mismo color:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2\left|x\right|}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}\left|x\right| \to \frac{1}{4}\left|x\right|$$

Luego $\frac{1}{4}\left|x\right| < 1 \Rightarrow \left|x\right| < 4$ Por lo tanto, el radio de convergencia es igual a 4.

Como $\left|-2\right| < 4$, en $x=-2$ la serie es convergente.

Se pueden hacer los ejercicios 11 a 13 de la práctica.

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Series, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.