

Práctica 9

Transformadas de Fourier y Laplace y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales

Notaciones y definiciones

★ $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en } \mathbb{R}\}$

★ $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt \quad f \in G(\mathbb{R})$

★ $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt \quad f, g \in G(\mathbb{R})$

Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de L^1

a) $e^{-|x|}$

b) $\frac{1}{1+x^2}$

c) e^{-ax^2}

d) $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$

e) $\begin{cases} 0 & |x| > A \\ 1 & |x| < A \end{cases}$

f) $\begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & x \notin [0, a) \end{cases}$

2. Sean $f, g \in G(\mathbb{R})$. Probar las siguientes propiedades de la convolución:

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right)$

3. Sea $f \in G(\mathbb{R})$. Probar:

a) $g(x) = e^{iax} f(x) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = \hat{f}(t - a)$

b) $g(x) = f(x + a) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = e^{iat} \hat{f}(t)$

c) $g \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

e) $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = a \hat{f}(at)$

f) $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ es derivable y $\hat{f}' = \hat{g}$

g) $f^{(n)} \in C^n \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

h) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$ es par e $\operatorname{Im}(\hat{f})$ es impar.

i) $g(x) = f(ax + b), a \neq 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$

j) $g(x) = f(x) \cos(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k) $g(x) = f(x) \operatorname{sen}(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l) f continua y $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

a) Comprobar que $\hat{f}(t) = 2 \frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

b) Verificar que:

i) $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c, d] \\ 0 & x \notin [c, d] \end{cases} = f\left(\frac{2}{d-c}x - \frac{d+c}{d-c}\right)$

ii) $k(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \notin [0, \pi] \end{cases} = \operatorname{sen} x f\left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)$

c) Calcular \hat{h} y \hat{k} usando el ejercicio 3.

5. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^1 .

a) $e^{-a(x-b)^2}$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}$) b) $e^{-x^2} \operatorname{sen}(ax)$ c) $\frac{1}{x^2 + a^2}$

6. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de L^2 .

a) $\frac{x}{x^2 + 1}$ b) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ c) $\frac{x^3}{1 + x^4}$

d) $\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$ e) $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ f) $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$ ($a > 0$)

• Sean $f, g \in L^2$, continuas a trozos. Se tienen las siguientes propiedades:

a) $f \pm g, f \pm ig \in L^2$.

b) i) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2 dt$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2 dt$

c) Identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$$

7. Usando la identidad de Parseval, calcular las siguientes integrales.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-ita}}{it} \right|^2 dt, (a > 0)$ c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(at) \text{sen}(bt)}{t^2} dt$

8. Utilizando la identidad de Parseval/Plancherel, probar que

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(2\omega + 1)}{4\omega^2 + 4\omega + 1} d\omega = \frac{\pi}{2}.$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 + 2t + 2} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$

9. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

a) $\frac{\text{sen}(au)}{u}$ b) $\frac{1 - \cos(au)}{u}$ c) e^{-u^2} d) $\frac{u}{u^2 + 1}$

10. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de: $g(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^2}$ interpretándola como la transformada de una convolución.

b) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)}g(y) dy$, en función de \hat{g} .

• **Regla de Leibniz**

Sea $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds$.
Entonces:

a) g es continua.

b) Si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ entonces g es C^1 y $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds$

11. Resolver transformando Fourier en la variable x

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2}$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2}$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = 6e^{-3x} h(x) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}$

12. Función Gama

La función $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

se llama *función Gama*.

a) Probar que:

$$\star \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

$$\star \Gamma(n) = (n-1)! \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Re}(z) < 0$ se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

c)† Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda banda vertical de la forma $0 < \epsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq M$.

Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Transformada de Laplace

13. Hallar la transformada de Laplace de:

a) $\operatorname{sen} x$

b) x^3

c) $(x+b)^2$

14. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

15. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) s^{-2}

b) $s^{-\frac{1}{2}}$

c) $(s^2 - a^2)^{-1}$

d) $\frac{e^{-as}}{s^2}$

e) $\frac{1}{s^2 + s + 2}$

f) $\frac{e^{-3s}}{s^2 + s + 2}$

g) $(s-2)^{-\frac{1}{2}}$

h) $\frac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s^2 + 2s}$

i) $\frac{2s+3}{s^2 - 4s + 20}$

j) $\log(1+s^{-1})$

k) $\log\left(\frac{s+6}{s+2}\right)$

16. a) Hallar f tal que:

(i) $f(t) = \int_0^t f(t-u)e^u du + \cosh(t)$

(ii) $f(t) = 1 + \int_0^t f(t) \operatorname{sen}(t-u) du$

b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right)(t)$

c) Probar que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right)(t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$, $s, t > 0$.

17. Resolver, para $x > 0$:

a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + u' + u = \sin x$ con: $u(0) = 0, u'(0) = 1$

c) $x u'' + u' + x u = 0$ con: $u(0) = 1, u'(0) = 0$

Nota: en c) hallar solo la transformada de Laplace de u .

18. Transformando Laplace, hallar $u(x, t)$ de clase \mathcal{C}^1 y de orden exponencial respecto de t , definida para $(x, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, solución de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 4\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 2e^{-3x}.$$

Sugerencia: Recordar que si $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de orden exponencial, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

19. Transformando Laplace, hallar $u(x, t)$ solución de:

a) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + 2u(x, t) = 0$

$$u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

b) $y'(t) + 7 \int_0^t \cos(3t - 3\tau)y(\tau)d\tau = 1 \quad (t \geq 0)$

$$y(0) = 2$$