Práctica 8
Series de Fourier - Separación de variables

---

1. **a)** Verificar que
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$
converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) *no* converge a cero en media cuadrática.

   b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en [0,1] pero que (f_n) *no* converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.

   c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.

2. Encontrar los valores A_1, A_2 y A_3 de modo que la función
$$y = A_1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}x)$$
sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c \operatorname{sen} x)^2 \, dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.

4. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrable, extendida a $\mathbb{R}$ con período 2π. Sean c_n $(n \in \mathbb{Z})$, a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ y b_n $(n \in \mathbb{N})$ los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.

   a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.

   c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.

5. **a)** Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ para:

   (i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

   (ii) $f(x) = x$

   (iii) $f(x) = x^2$

   (iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando **(iii)**, calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \qquad\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x)=x^2$, $x\in(-\pi,\pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n^3}=\frac{1}{12}t(t^2-\pi^2)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

6. **a)** A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función $2\pi-$periódica que coincide con e^x en $(-\pi,\pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en **a)**, a partir del desarrollo en serie exponencial.

7. Si $f(x)=|\operatorname{sen}x|$, $-\pi\leq x\leq\pi$, probar que $f(x)$ coincide con su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

8. Sea f la función de período 2π que en $[-\pi,\pi]$ se define como $f(x)=\cos(ax)$ $(a\in\mathbb{R})$.

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2-b^2)^2}$, $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

9. **a)** Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x)=e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi\leq x\leq\pi$, $\alpha\in\mathbb{C}$ (como función $2\pi-$periódica).

b) Probar que: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\alpha\cos x}dx=\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

10. Si

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x\leq 0\\ 0 & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x+2)=f(x) \ \text{ para todo } \ x\in\mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x.

- Sea f integrable en $[-p,p]$ y tal que $f(x+2p)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

a) Entonces,

- $$\int_{a-p}^{a+p} f(t)\ dt = \int_{-p}^{p} f(t)\ dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$
- $$\int_{2p}^{2p+x} f(t)\ dt = \int_{0}^{x} f(t)\ dt \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

b) Si $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, entonces:

$$g(x+2p) = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-p}^{p} f(t)\ dt = 0$$

11. Probar que si f es integrable y $2p-$periódica:

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)(p-x)\ dx = \sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0 = \frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el resultado anterior e integración por partes.

12. Sea f $2p-$periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\ dx$. Demostrar que F es $2p-$periódica.

13. Para cada una de las siguientes funciones definidas en $(0,\pi)$ definir su extensión par e impar y obtener las correspondientes series de Fourier (como funciones 2π-periódicas):

a) $f(x) = \cos x$ **b)** $f(x) = -x$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

14. Sea $f(x) : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ la función $2\pi-$periódica

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi + x}{\pi} & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\[2mm] \dfrac{\pi - x}{\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Calcular la serie de Fourier trigonométrica de f y analizar su convergencia puntual.

(b) A partir de la serie hallada en (a) probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

15. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \pi - x & \text{si } \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Hallar la serie de Fourier exponencial de f (como función $2\pi-$periódica). Probar que la serie converge puntualmente a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

16. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

(a) Hallar la serie de Fourier exponencial de f (como función $2-$periódica).

(b) Analizar para todo $x \in [-1, 1]$ la convergencia puntual de de la serie hallada en (a), justificando adecuadamente en qué puntos converge y a qué valor.

17. **a)** Probar que la serie $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.

b) Calcular la $n-$ésima suma parcial de esta serie.

18. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ $2\pi-$periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también $2\pi-$periódica.

a) ¿Qué relación hay entre f y g?

b) Calcular las series de Fourier de f y de g.

c) Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f. ¿Es la serie de Fourier de g? ¿Converge?

19. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \ge 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \qquad\qquad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \ge 1} \frac{n.\operatorname{sen}(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g.

a) ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?

b) ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?

c) ¿Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a $\mathbb{R}$.

20. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}((2n+1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

21. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \ \text{ en } \ [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \ \text{ en } \ [-\pi, \pi)$$

a) Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.

b) Determinar la función $h(x)$ sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h.

22. Desarrollar $\operatorname{sen}^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

23. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \operatorname{sen} t) \qquad g(t) = e^{r \cos t} \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} t) \qquad h(t) = \frac{1}{1 - re^{it}} \qquad 0 < r < 1.$$

Separación de variables

24. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

i) $u(0) = u(\pi) = 0$

ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

iii) $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

25. Usando separación de variables resolver:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0, y) = 8e^{-3y}.$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\, t > 0.$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$, $|u(x,t)| < M$, $u(x,0) = 5\,\mathrm{sen}(4\pi x) - 3\,\mathrm{sen}(8\pi x) + 2\,\mathrm{sen}(10\pi x)$.

c) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0,$

$u(x,0) = 8\,\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4}\right) - 6\,\cos\left(\dfrac{9\pi x}{4}\right).$

d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < \pi,\, t > 0.$

$u(x,0) = x(\pi - x), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$

donde κ es una constante positiva.