

Práctica 2

Nociones topológicas en análisis complejo

1. a) Sea $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que

$$z_n \rightarrow z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

- b) Probar que la sucesión $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones reales $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \geq 1}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \geq 1}$ son de Cauchy.

Deducir que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

- c) $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca?

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) ni^n	b) $n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	c) $\left(\frac{(-1)^n + i}{2} \right)^n$
d) $\cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$	e) $\frac{n+1}{n} + i \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$	f) $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$
g) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$	h) $\left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	i) z^{-n}

3. Probar

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

4. Calcular

a) $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z + 2i}$

b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$

c) $\lim_{z \rightarrow -i} z \cdot \bar{z}$

d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$

e) $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ con $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$

f) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3iz + 2 + i}{z^4 + iz^2 - (3 + 4i)z + 6}$

5. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

a) $z, \bar{z}, \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ en \mathbb{C} .

b) $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

6. Hallar los puntos de discontinuidad de:

a) $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$

b) $f(z) = \frac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + 1}$
($z = x + iy$)

7. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \rightarrow (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z| e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

Nota: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de z** y se lo nota: $\varphi(z) = \operatorname{Arg}(z)$.

8. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en \mathbb{C} ?

a) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$

b) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

c) $\frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{|z|}$

d) $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$