

Práctica 1

Introducción a los números complejos

1. Representar gráficamente los números: $z, w, z + w, z - w, \bar{z}, \bar{w}, zw$, para:

a) $z = 2i, w = \frac{3}{2} - i$

b) $z = -\sqrt{3} + i, w = \sqrt{3}$

2. **a)** Sea $z \in \mathbb{C}$, probar:

i) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

ii) $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |z|^2$

iii) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

iv) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

v) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, probar que:

i) $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$

ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

iii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

3. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

a) $3 + \sqrt{3}i$

b) $(-1 - i)^{-1}$

c) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$

d) $(-1 - \sqrt{3}i)^5$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|z| - z = 1 + 2i$

b) $z\bar{z} - 2|z| + 1 = 0$

c) $z^6 + 2 = 0$

d) $z^4 - 1 - i = 0$

5. **a)** Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$az^2 + bz + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

- b) Resolver: $z^2 - (2i + 4)z + 10i - 5 = 0$
6. Probar que si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, la ecuación $|z - 1| = c|z + 1|$ representa una circunferencia o una recta.
Representar gráficamente: $|z - 3| = 2|z + 3|$ y $|z - 3| < 2|z + 3|$
7. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c}z + \beta = 0$ representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y probar que toda circunferencia o recta puede escribirse de esta forma.
8. a) Dadas las funciones
 $t(z) = z + c, c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación)
 $h(z) = a(z - z_0) + z_0, \text{ con } a \in \mathbb{C}_{\neq 0}, z_0 \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a)
 $i(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$ (inversión)
describirlas geoméricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?
- b) Probar que $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ (homografía) se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en a). Deducir cuál es la imagen por f de una circunferencia o de una recta.
- c) Verificar que $g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ es la homografía inversa de $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.
9. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:
- a) el cuadrante $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ por $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.
- b) el medio-disco $\{z : \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$.
10. Describir geoméricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones.
Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.
- a) $|\operatorname{Im}(z)| > 1$ b) $\operatorname{Re}(z - iz) \leq 2$ c) $|z - 1 + 3i| \leq 1$
- d) $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi, |z| > 2$ e) $|z - 4| > 3$ f) $1 < |z - 2i| \leq 2$
- g) $0 \leq \operatorname{Arg}(z^2) \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$ h) $\operatorname{Im}(z^2) > 0$ i) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$