MATEMÁTICA 4

Patricia Jancsa

INTEGRACIÓN COMPLEJA

Integrales Complejas

Ejercicio 1. a) Resolver la integral impropia

$$\int_0^{\infty} e^{zt}\, dt \quad \text{sabiendo que } z = a + bi : a < 0,$$

Solución: a)

$$\int_0^{\infty} e^{zt}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} e^{zt}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{z} e^{zt}\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{z}[e^{zR} - 1] \ (*)$$

Pero el límite anterior es de tipo cero x acotado pues

$$a < 0 \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} e^{aR} = 0$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{z}[e^{aR}\Big(\cos(bR) + i\,\mathrm{sen}(bR)\Big) - 1] = -\frac{1}{z} \ ✓$$

Ejercicio 1. b) Resolver $\int_{e^2}^{e^9} \log(it)\ dt$

Solución: 1. b)) Calculemos la primitiva por partes del $\ln(x)$ en $\mathbb{R}$:

$$\int \ln(x)\ dx = \int 1 \cdot \ln(x)\ dx = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\ dx = x \cdot [\ln(x) - 1]$$

Luego, usando la definición de logaritmo complejo:

$$\int_{e^2}^{e^9} \log(it)\ dt = \int_{e^2}^{e^9} [\ln|it| + i\ Arg(it)]\ dt = \int_{e^2}^{e^9} [\ln t + i\ \frac{\pi}{2}]\ dt$$

$$= t \cdot [\ln(t) - 1]\Big|_{e^2}^{e^9} + i\frac{\pi}{2}t\Big|_{e^2}^{e^9} = (6 + i\frac{\pi}{2})(e^9 - e^2)\ \checkmark$$

Integral de línea a lo largo de una curva

Definición: Dado un dominio abierto y conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ continua sobre la curva $\mathcal{C}^1$ a trozos $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$,

la **integral de línea de f a lo largo de** γ se define como

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt}$$

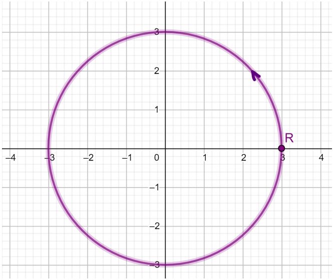
$$= \int_a^b [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]dt$$

Integrales de línea

Ejercicio 2. Calcular $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ a lo largo de $\gamma : |z| = R$ recorrida una vez en sentido antihorario a partir de $z = R$.

Solución. Parametricemos

$\gamma : z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \Longrightarrow z'(t) = Rie^{it}$



$z(0) = z(2\pi) = R$

Parametricemos $\gamma : z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \Longrightarrow z'(t) = Rie^{it}$

Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = Re^{-it} \cdot Rie^{it} = R^2 ie^{-it+it} = R^2 i$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 i\ dt = R^2 i \int_0^{2\pi} 1\ dt$$

$$= 2\pi\ R^2\ i\ \checkmark$$

Teoremas de Integración para f continua

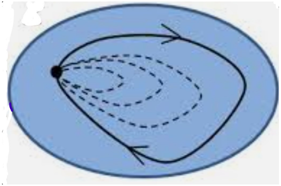
Teorema 1: Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función continua, con D abierto y conexo. Son equivalentes:

- f tiene una primitiva, es decir, existe $F : D \to \mathbb{C} : F' = f$ en D
- Si γ va del punto p al punto q en D, la integral $\int_\gamma f(z)dz$ depende sólo de p y q pero no del recorrido.
- Si γ es una curva cerrada contenida en D, la integral $\int_\gamma f(z)dz = 0$ ✓

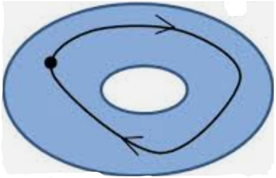
Conjuntos simplemente conexos

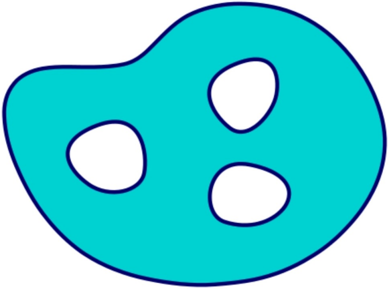
Un conjunto U es simplemente conexo si no tiene agujeros, es decir, si todo punto interior a su frontera, pertenece a U.

Equivalentemente, U es simplemente conexo si toda curva en U se puede deformar de forma continua a un punto.



Conjuntos no simplemente conexos





La curva
no se contrae a un punto
de forma continua

El conjunto tiene agujeros

Teoremas para f holomorfa

Teorema 2: Sea $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa, con D simplemente conexo, entonces existe $F : D \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$

Corolario: Si $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa, con D simplemente conexo, entonces vale el teorema 1.

¿Existe h holomorfa tal que $h'(z) = \overline{z}$?

¿Existe h holomorfa tal que $h'(z) = \overline{z}$?

Ejercicio 2 $\Rightarrow$ la integral de $f(z) = \overline{z}$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma : |z| = R$ es distinta de 0

$\Longrightarrow$ no existe h holomorfa tal que $h'(z) = \overline{z}$

$\Longrightarrow$ $f(z) = \overline{z}$ no es holomorfa en ningún disco que contiene a $z = 0$

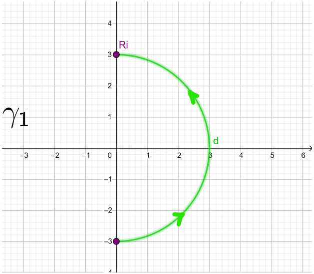
Dos curvas distintas que unen los mismos puntos

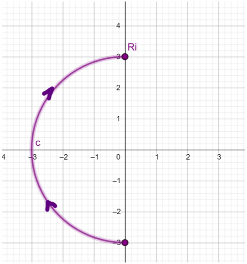
Ej. 3. Calculemos $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ donde γ es una semicircunferencia $|z| = R$ de $p = -Ri$ a $q = Ri$,

a) γ_1 contenida en el semiplano $x \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

b) γ_2 contenida en el semiplano $x \leq 0$, recorrida en en sentido horario.

γ_1





γ_2

Solución 3. a. Parametricemos γ_1 antihorario de $p = -Ri$ a $q = Ri \implies z(t) = Re^{it} : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = Re^{-it} \cdot Rie^{it} = R^2 ie^{-it+it} = R^2 i$

$$\implies \int_\gamma f(z)\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z(t))z'(t)\ dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 i\ dt = R^2 i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt$$

$$= R^2 i \cdot \pi$$

Solución 3. b. γ_2 en sentido horario

γ en sentido horario de $p = -Ri$ a $q = Ri$

$\Longrightarrow z(t) = Re^{-it} : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

$\Longrightarrow$ Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = Re^{+it} \cdot (-Rie^{-it})$
$= -R^2 ie^{-it+it} = -R^2 i$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(z(t))z'(t)\ dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} R^2 i\ dt = -R^2 i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1\ dt$$

$$= -R^2 i \cdot \pi$$

Integral a lo largo de dos caminos distintos que unen p con q

Ejercicio 3 $\Longrightarrow$ la integral de $f(z) = \bar{z}$ a lo largo de dos caminos distintos que unen p con q da valores distintos

$\Longrightarrow$ $f(z) = \bar{z}$ no es la derivada de ninguna holomorfa

$\Longrightarrow$ $f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$

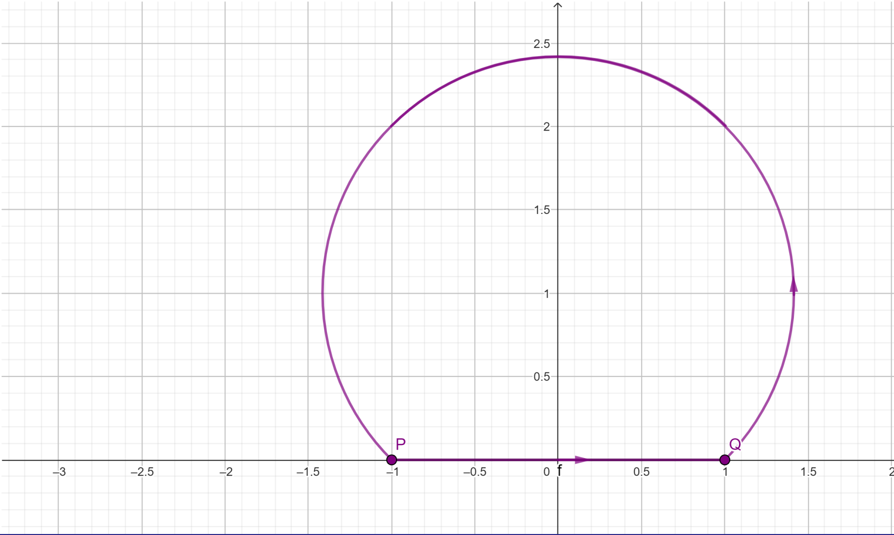
Ejercicio 4.

Sea γ la curva cerrada, simple, que recorre el segmento desde $P = -1$ hasta $Q = 1$, seguido del arco de circunferencia de radio $R = \sqrt{2}$ con centro en $z_0 = i$, en sentido antihorario. Resolver la integral de línea justificando por qué no necesariamente da cero:

$$\int_\gamma \frac{1}{|z-i|^2}\, dz$$

Solución: El integrando no es holomorfo, luego no vale el teorema de Cauchy y la integral a lo largo de una curva cerrada no tiene por qué valer cero. Resolvamos por definición.

γ :



γ es la concatenación de 2 curvas:

- C_1 es el segmento que une $p = -1$ con $q = 1$:

$z(t) = -1 + 2t \Rightarrow z'(t) = 2: \; 0 \leq t \leq 1.$

- C_2 es el arco de circunferencia que une $q = 1$ con $p = -1$, que parametrizamos por por $z(t) = i + \sqrt{2}e^{ti}$.

¿En qué intervalo hay que evaluar t? Busquemos valores de t para los puntos inicial y final de la curva:

- Punto inicial $q = 1 = i + \sqrt{2}e^{ti} \iff \frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{ti}$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = e^{ti} \Rightarrow t = -\frac{1}{4}\pi$$

- Punto final $p = -1 = i + \sqrt{2}e^{ti} \iff \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = e^{ti}$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i) = e^{ti} \Rightarrow t = \frac{5}{4}\pi$$

Por lo tanto
$z(t) = i + \sqrt{2}e^{ti} : \ -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \ \Rightarrow z'(t) = \sqrt{2}ie^{ti}.$

Calculemos entonces la integral por definición:

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{|z-i|^2}\, dz = \int_{C_1} \frac{1}{|z-i|^2}\, dz + \int_{C_2} \frac{1}{|z-i|^2}\, dz$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{|(-1+2t)-i|^2}\, dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}ie^{ti}}{|\sqrt{2}e^{ti}|^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(-1+2t)^2+1}\, dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}ie^{ti}}{2}\, dt$$

$$= \arctan(-1+2t)\Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ e^{ti}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

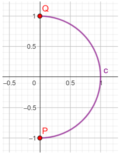
$$\boxed{= \arctan(1) - \arctan(-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,[-1 - i - (1 - i)]}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[-\frac{\pi}{4}\right] - 1 \boxed{= \frac{\pi}{2} - 1 \checkmark}$$

Ejercicio 5. Sea C la curva (abierta) dada por la semicircunferencia $C : |z| = 1, Re(z) \geq 0$, simple, recorrida una vez en sentido positivo, desde $P = -i$ hasta $Q = i$, y $f(z) = z^{-1/2}$ la rama principal. Calcular $\int_C f(z)\, dz$.

Solución. Sea $Log(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z) = \ln|z| + i\theta$, donde $-\pi < \theta < \pi$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = z^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2}\ Log(z)} = |z|^{-1/2}\ e^{-\frac{1}{2}\theta i}}$$



$$C : z(t) = e^{it} : -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow z'(t) = ie^{it}$$

Resolvamos primero, sabiendo que $|e^{it}| = 1,\ Arg(e^{it}) = t$:

$$(e^{it})^{-1/2} = |e^{it}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta i} = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}ti}$$

Por lo tanto, la integral es

$$\int_C z^{-1/2}\ dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (z(t))^{-1/2}\ z'(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{it})^{-1/2}\ i\ e^{it}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{-\frac{1}{2}ti+it}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{+\frac{1}{2}ti}dt$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}ti}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{4}i} - 2e^{-\frac{\pi}{4}i} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}i = 2\sqrt{2}i\ \checkmark$$

Ejercicio 5. b)

¿No se hubiera podido resolver usando una primitiva?

En realidad,

$$\int_C f(z)dz = \int_P^Q z^{-1/2}\ dz = 2\ z^{+1/2}\Big|_P^Q = 2|z|^{1/2}\ e^{\frac{1}{2}\theta i}\Big|_{z=-i}^{z=i}$$

$$= 2\ \left[e^{\frac{1}{2}\pi/2i} - e^{\frac{1}{2}(-\pi/2)i}\right] = 2\ \left[e^{\pi/4i} - e^{-\pi/4i}\right] = 2\sqrt{2}i\ \checkmark$$

Ejercicio 6.

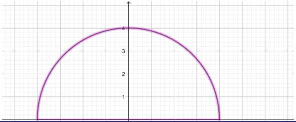
Sea γ la curva cerrada dada por el segmento $[-4, 4]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen de radio 4, contenida en el semiplano superior. Parametrizar γ simple, suave a trozos, recorrida una vez en sentido positivo, desde $z = 4$. Calcular:

$$\int_\gamma Re(z)\ dz$$

Explique por qué la integral no necesariamente debe ser cero.

Solución:

$\int_\gamma Re(z)\ dz = \int_{segmento} Re(z)\ dz + \int_{semicircunferencia} Re(z)\ dz$



- Parametricemos el segmento $[-4,4]$:

$$z(t) = -4 + 8t: \; 0 \leq t \leq 1$$

$$\implies \; integrando \; = Re(z(t))z'(t) = Re(-4{+}8t){\cdot}8 = 32(-1{+}2t)$$

- Parametricemos la semicircunferencia de radio 4:

$z(t) = 4e^{it} : 0 \leq t \leq \pi$

$$\implies \; integrando \; = Re(z(t))z'(t)$$

$$= 4^2 \cos(t) ie^{it} = 4^2 \cos(t)[- \operatorname{sen}(t) + i \cos(t)]$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma Re(z)\ dz = \int_{segmento} Re(z)\ dz + \int_{semicircunferencia} Re(z)\ dz$$

$$= \int_0^1 32(-1+2t)\ dt + \int_0^\pi 4^2 \cos(t)\Big[-\operatorname{sen}(t) + i\cos(t)\Big]\ dt$$

$$= 8[-1+2t]^2\Big|_{t=0}^{t=1} + 4^2\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) + i\left[\frac{2t+\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= 0 + 4^2\frac{\pi i}{2} = 8\pi i \ \checkmark$$

Recordemos que $|z|^2$ no es holomorfa.

Ejemplo 7.a. Calcular $\int_\sigma |z|^2\, dz$; $\sigma : |z| = R$ recorrida una vez en sentido positivo.

Parametricemos $z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Longrightarrow f(z(t)) \cdot z'(t) = R^2 i\ Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_\sigma |z|^2\, dz = \int_0^{2\pi} R^3 i e^{it}\, dt = R^3 \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it}\, dt$$

$$= R^3 \cdot i \cdot \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{2\pi} = R^3 \cdot (e^{2\pi i} - e^0) = R^3 \cdot (1 - 1) = 0$$

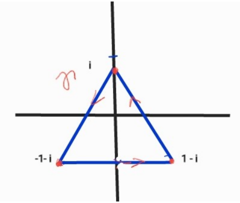
aunque $f(z) = |z|^2$ no sea holomorfa.

Ejercicio 7.b) Recordar que $|z|^2$ no es holomorfa.

Calcular $\int_C |z|^2 \, dz$: C la poligonal cerrada

$$C : -1-i \to 1-i \to i \to -1-i$$

Segmento $P \to Q \Longrightarrow z(t) = P + t(Q-P) : 0 \leq t \leq 1$:



$|z|^2$ no es holomorfa

Calculemos $\int_C |z|^2 \, dz$: C **la poligonal cerrada**

$$C : -1-i \to 1-i \to i \to -1-i$$

Segmento $P \to Q \Longrightarrow z(t) = P + t(Q-P) : 0 \leq t \leq 1$:

- $z_1(t) = -1-i+2t \to z'(t) = 2$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[(-1+2t)^2 + 1\right] \cdot 2$$
- $z_2(t) = 1-i+t(-1+2i) \to z'(t) = -1+2i$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[(1-t)^2 + (-1+2t)^2\right] \cdot (-1+2i)$$
- $z_3(t) = i+t(-1-2i) \to z'(t) = (-1-2i)$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[t^2 + (1-2t)^2\right] \cdot (-1-2i)$$

$$\Longrightarrow \int_C |z|^2 \, dz = \int_{z_1} |z|^2 \, dz + \int_{z_2} |z|^2 \, dz + \int_{z_3} |z|^2 \, dz$$

$|z|^2$ no es holomorfa $\Rightarrow$ a lo largo de curvas distintas se obtienen resultados distintos

$$\Longrightarrow \int_C |z|^2\, dz = \int_{z_1} |z|^2\, dz + \int_{z_2} |z|^2\, dz + \int_{z_3} |z|^2\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[(-1+2t)^2+1\right]\cdot 2\, dt + \int_0^1 \left[(1-t)^2+(-1+2t)^2\right]\cdot(-1+2i)$$

$$+\int_0^1 \left[t^2+(1-2t)^2\right]\cdot(-1-2i)\ dt$$

$$= \frac{8}{3} + (-1+2i)\frac{2}{3} - (1+2i)\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Problema: $|z|^2$ no es holomorfa

Solución: se integra sin problema a lo largo de curvas sólo por definición.

Ejercicio 8. Sea γ la curva cerrada dada por la circunferencia centrada en el origen de radio 4, simple, suave a trozos, recorrida una vez en sentido positivo, desde $z = 4$.
Parametrizar γ y calcular:

$$\int_\gamma Re(z)\ dz$$

Solución:

- Parametricemos la circunferencia de radio 4:

$z(t) = 4e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$

- *Integrando* $= Re(z(t))z'(t)\ dt = 4^2 \cos(t) ie^{it}\ dt$

$$= 4^2 \cos(t)[-\operatorname{sen}(t) + i\cos(t)]\ dt$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma Re(z)\ dz = \int_{circunferencia} Re(z)\ dz$$

$$= \int_0^{2\pi} 4^2 \cos(t)\Big[-\operatorname{sen}(t) + i\cos(t)\Big]\ dt$$

$$= -4^2 \int_0^{2\pi} \cos(t)\operatorname{sen}(t)\ dt + 4^2 i \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+\cos(2t)}{2}\right]\ dt$$

$$= 4^2 \left[\frac{1}{2}\cos^2(t) + i\left(\frac{2t+\operatorname{sen}(2t)}{4}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= 4^2 \frac{4\pi i}{4} = 16\pi i \ \checkmark$$

Ejercicio 9. a) Calcular $\int_\sigma |z|^2\, dz$; $\sigma : |z| = R$ recorrida una vez en sentido positivo.

Parametricemos $z(t) = Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Longrightarrow f(z(t)) \cdot z'(t) = R^2 i\ Re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_\sigma |z|^2\, dz = \int_0^{2\pi} R^3 ie^{it}\, dt = R^3 \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it}\, dt$$

$$= R^3 \cdot i \cdot \frac{1}{i} e^{it}\Big|_0^{2\pi} = R^3 \cdot (e^{2\pi i} - e^0) = R^3 \cdot (1-1) = 0$$

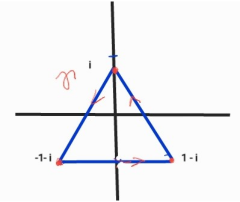
aunque $f(z) = |z|^2$ no sea holomorfa.

Ejercicio 9. b) Calcular $\int_\gamma |z|^2 \, dz$: γ la poligonal cerrada dada por la concatenación de 3 segmentos

$$\gamma : -1 - i \to 1 - i \to i \to -1 - i$$

Concluir que $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa.

Segmento $P \to Q \Longrightarrow z(t) = P + t(Q - P) : 0 \leq t \leq 1$:



$|z|^2$ no es holomorfa

La poligonal cerrada γ es la concatenación de 3 segmentos:

$$\gamma : -1 - i \to 1 - i \to i \to -1 - i$$

Segmento $P \to Q \implies z(t) = P + t(Q - P) : 0 \leq t \leq 1$:

- $z_1(t) = -1 - i + 2t \to z'(t) = 2$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[(-1 + 2t)^2 + 1\right] \cdot 2$$
- $z_2(t) = 1 - i + t(-1 + 2i) \to z'(t) = -1 + 2i$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[(1 - t)^2 + (-1 + 2t)^2\right] \cdot (-1 + 2i)$$
- $z_3(t) = i + t(-1 - 2i) \to z'(t) = (-1 - 2i)$
$$\to f(z(t)) \cdot z'(t) = \left[t^2 + (1 - 2t)^2\right] \cdot (-1 - 2i)$$

$$\implies \int_\gamma |z|^2 \, dz = \int_{z_1} |z|^2 \, dz + \int_{z_2} |z|^2 \, dz + \int_{z_3} |z|^2 \, dz$$

$|z|^2$ no es holomorfa $\Rightarrow$ a lo largo de curvas distintas se obtienen resultados distintos

$$\Longrightarrow \int_\gamma |z|^2 \; dz = \int_{z_1} |z|^2 \; dz + \int_{z_2} |z|^2 \; dz + \int_{z_3} |z|^2 \; dz$$

$$= \int_0^1 \left[(-1+2t)^2+1\right] \cdot 2 \, dt + \int_0^1 \left[(1-t)^2 + (-1+2t)^2\right] \cdot (-1+2i)$$

$$+ \int_0^1 \left[t^2 + (1-2t)^2\right] \cdot (-1-2i) \; dt$$

$$= \frac{8}{3} + (-1+2i)\frac{2}{3} - (1+2i)\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Problema: $|z|^2$ no es holomorfa

Solución: se integra sin problema a lo largo de curvas sólo por definición

Integrales de funciones holomorfas

Integrales de funciones holomorfas

Ej 10. Calcular $\int_\sigma 2(z+1)^3 + e^{\pi z i} dz$ donde σ es la poligonal dada por la concatención de los segmentos:

$$z_0 = 0 \to z_1 = 1 \to z_2 = 1 + i \to z_3 = -1 + 2i$$

Solución:

$$\int_\sigma 2(z+1)^3 + e^{\pi z i} dz = \left[\frac{2}{4}(z+1)^4 + \frac{1}{\pi i} e^{\pi z i}\right]\Big|_0^{-1+2i}$$

$$= \frac{1}{2}[(2i)^4 - 1] + \frac{1}{\pi i}\left[e^{\pi i(-1+2i)} - 1\right]$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{1}{\pi i}\left[e^{-2\pi} - 2\right] \checkmark$$

Singularidades fuera de la región

Ej. 11. Sea C la circunferencia $|z| = 1$ recorrida una sola vez en sentido positivo. Use el Teorema de Cauchy para comprobar que son nulas las siguientes integrales.

$a)\ \displaystyle\int_C \frac{z^3}{(z+3)^6}\, dz$

$b)\ \displaystyle\int_C \frac{(z + senh(2z))^2}{\cos z}\, dz$

$c)\ \displaystyle\int_C \frac{e^{2z} + 3\tanh z}{z^2+4}\, dz$

$d)\ \displaystyle\int_C \frac{3\,\mathrm{sen}^2 z}{z^2 - 7z + 7}\, dz$

$e)\ \displaystyle\int_C \frac{1+\tan^2 z}{\cosh^2 z}\, dz$

$f)\ \displaystyle\int_C \frac{z^2+3z+4}{z^4 - 7z^3 + 3z^2 + 28z - 28}$

Ayuda para el item f: El denominador es divisible por $z^2 - 4$

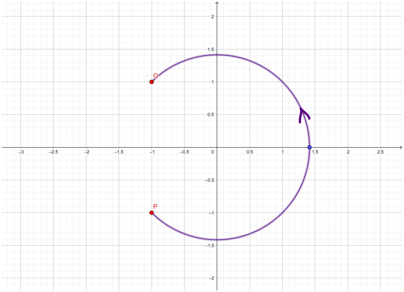
Integral de h' holomorfa

Ej 12. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$: γ une $p = -1 - i$ y $q = -1 + i$:

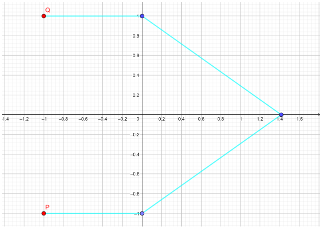
a) $\gamma_1 : |z| = \sqrt{2}$ recorrida una vez en sentido antihorario.

b) γ_2 la poligonal que une los puntos p $\to -i \to 1 \to i \to$ q

γ_1



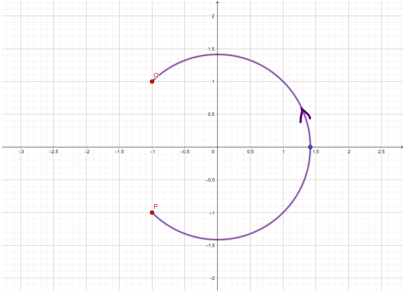
γ_2



Solución 12. a) $\gamma : \Longrightarrow z(t) = \sqrt{2}e^{it} : -\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}e^{it}} \cdot \sqrt{2}ie^{it} = i$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)\ dz = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(z(t)) \cdot z'(t)\ dt = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} i\ dt = \frac{3\pi}{2} i$$

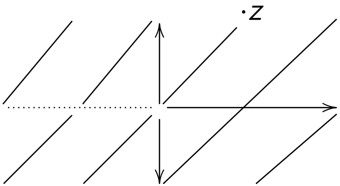


γ

Pero ¿$h' = \dfrac{1}{z}$ para alguna h holomorfa?

Teorema 1: Ω abierto, $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, γ curva simple suave que une p con q
$\Longrightarrow \int_\gamma h'(z)\, dz = h(q) - h(p)$ no depende de γ
¿$h' = \frac{1}{z}$ para alguna h holomorfa? Sí, para el log principal

$h(z) = Log(z) : \Omega_{-\pi} \to U_{-\pi}$



$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = Log(q) - Log(p)$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = Log(q) - Log(p)$$

$$= \ln|q| + i\ arg(q) - [\ln|p| + i\ arg(p)]$$

$$= \ln|-1+i| + i\ arg(-1+i) - \Big[\ln|-1-i| + i\ arg(-1-i)\Big]$$

$$= \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i - \left[\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i\right] = \frac{3\pi}{2}i$$

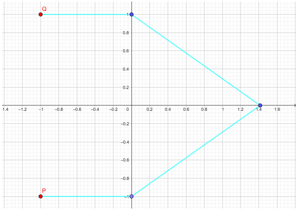
Dados $p, q \in \Omega_{-\pi}$ = dominio del log principal, la integral a lo largo de cualquier curva $\gamma \subseteq \Omega_{-\pi}$ da el mismo valor y éste es igual al valor de su primitiva $Log(z)$ en $\Omega_{-\pi}$ evaluada en q menos en p.

A lo largo de otra curva que se puede deformar continuamente (homotópica) a la anterior, da el mismo el resultado

Solución 12. b) $\gamma =$ poligonal dada o cualquier curva que va de p a q contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$

$$\text{Atención: } h'(z) = \frac{1}{z} = \textit{ derivada del mismo } h(z) = Log(z)$$

pues γ está contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$



$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \frac{3\pi}{2} i$$

Atención: el resultado cambia si se integra a lo largo de una nueva curva no contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$, que no se puede deformar continuamente a la anterior.

Ejercicio 12. c) Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ con γ el arco de circunferencia que va de p a q, en sentido horario, por definición.

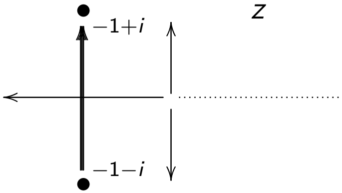
$$z(t) = Re^{-it} : \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \Longrightarrow \gamma \text{ no está contenido en } \Omega_{-\pi}.$$

Integrando $= f(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{1}{R}e^{+it} \cdot (-Rie^{-it})$
$= -ie^{-it+it} = -i$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(z(t))z'(t)\,dt = -\frac{\pi}{2}i \checkmark$$

Atención: el resultado cambia si se integra a lo largo de una nueva curva no contenida en el mismo dominio $\Omega_{-\pi}$, que no se puede deformar continuamente a la anterior.

Ejercicio 12. d) Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ con $\gamma =$ segmento vertical que va de p a q, por definición.



$\Longrightarrow \gamma$ no está contenido en $\Omega_{-\pi}$. Parametricemos

$z(t) = -1 - i + 2it : 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow z'(t) = 2i$

Parametricemos

$z(t) = -1 - i + 2it : 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow z'(t) = 2i$

$\Longrightarrow \text{integrando} = \frac{1}{z}\ dz$

$$= 2i \cdot \frac{1}{-1 - i + 2ti} = 2i \frac{-1 - (2t-1)i}{|-1 + (2t-1)i|^2} = 2 \frac{-i + (2t-1)}{1 + (2t-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\ dz = 2 \int_0^1 \frac{-i + (2t-1)}{(1 + (2t-1)^2)}\ dt$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\int_0^1 \frac{-i+(2t-1)}{(1+(2t-1)^2)}\, dt$$

$$= -i\cdot \int_0^1 \frac{2}{(1+(2t-1)^2)}\, dt + 2\int_0^1 \frac{(2t-1)}{(1+(2t-1)^2)}\, dt$$

$$= \left[-i\arctan(2t-1) + \ln(1+(2t-1)^2)\right]\Big|_0^1$$

$$= [-i\arctan(1)+\ln 2] - [-i\arctan(-1)+\ln 2]$$

$$= -\frac{1}{4}\pi i + \left(-\frac{1}{4}\pi i\right) = -\frac{\pi}{2} i \ \checkmark$$

Obtuvimos un resultado distinto pues la primitiva corresponde a otra rama del logaritmo: $\log : \Omega_0 \to U_0$ con $\arg(z) \in (0, 2\pi)$

Ej. 12. e) Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ usando la primitiva $\log : \Omega_0 \to U_0$, donde $\gamma =$ segmento vertical que va de p a q

$$\frac{1}{z} = log'(z) : \Omega_0 \to U_0$$

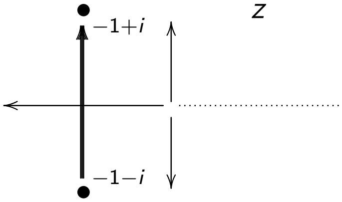
$\Longrightarrow \gamma$ está contenido en $\Omega_0 \Rightarrow$ usemos su primitiva en Ω_0

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = [ln|z| + i\ arg(z)]\ |_p^q$$

$$= [ln|-1+i| + i\ arg(-1+i)] - [ln|-1-i| + i\ arg(-1-i)]$$

$$= \ ln|2| + \frac{3}{4}\pi i - \left(\ ln|2| + \frac{5}{4}\pi i\right) = -\frac{\pi}{2} i$$

$h(z) = \log z : \Omega_0 \to U_0$



Conclusión

$f(z) = \frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a 0

$\boxed{\text{Atención: } \frac{1}{z} \text{ no tiene primitiva en ningún } \Omega}$

$\boxed{\text{que contenga a la circunferencia completa}}$

pues su primitiva $log : \Omega_\alpha \to U_\alpha$ está definida en

$$\Omega_\alpha = \mathbb{C} - \text{ la semirrecta de los z de argumento } \alpha$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz \text{ sólo se puede calcular por definición:}$$

Fórmula Integral de Cauchy

Ej 12. f) Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, con $\gamma : z(t) = Re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$ toda la circunferencia, recorrida una vez en sentido antihorario.

La integral no depende de la curva, siempre que sea cerrada y rodee al $z = 0$ una sola vez; la calculamos usando
$\gamma : Re^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = R i e^{it} dt$

$$\boxed{\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Re^{it} i\ dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i}$$

Este resultado es fundamental y se usará en futuros cálculos como Fórmula Integral de Cauchy

Atención $\frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a 0

No se pueden usar los teoremas de integración para $f(z) = \frac{1}{z}$ pues

- $\frac{1}{z}$ no es holomorfa en ningún dominio simplemente conexo que contiene a $z_0 = 0$
- $\frac{1}{z}$ no es la derivada de una función holomorfa definida en ningún dominio simp. conexo que contenga a $z_0 = 0$

  Solución: se integra correctamente
- sin problema a lo largo de curvas sólo por definición
- Por Fórmula Integral de Cauchy $\Longrightarrow \int_\sigma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$