

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES REALES CON RESIDUOS

Patricia Jancsa

En este texto vamos a desarrollar la resolución de integrales reales, usando el [Teorema de los Residuos](#).

Definición. La integral impropia de una función continua f a lo largo de todo \mathbb{R} está dada por la suma de dos límites:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_c^R f(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^c f(x) dx$$

Sabiendo previamente que la integral impropia converge, es posible calcularla como su **valor principal** **dado que ambas son iguales es decir, como un único límite:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

A continuación, el **valor principal de la integral impropia será calculado de forma exacta, a partir de la integral de línea a lo largo de una curva cerrada**, que es el segmento $[-R, R]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen, de radio R , contenida en el semiplano superior, usando el [teorema de los residuos](#).

Proposición a) Criterio del límite: Sean $f, g : (c, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ funciones continuas tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

entonces las integrales impropias $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ y $\int_c^{+\infty} g(x) dx$ convergen ambas o divergen ambas.

Es decir, **la integral impropia $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ converge si y sólo si $\int_c^{+\infty} g(x) dx$ converge.**

b)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge } \iff p > 1$$

y, en este caso, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{(p-1)}$. Es decir que converge para todo $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Ejemplo 1. Calcular

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz$$

donde $R > 2$ y Γ_R es la curva cerrada definida como el segmento $[-R, R]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen, de radio R , contenida en el semiplano superior, recorrida una sola vez en sentido antihorario.

Solución: • La curva es $\Gamma_R : [-R, R] \cup \gamma_R$ donde $\gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Llamemos Ω_R a la región cuya frontera es la curva anterior, es decir, el **semicírculo apoyado sobre el eje real, de radio R** .

$$\text{Teorema de los residuos} \Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \Omega_R} (\text{Res } f(z), z_k)$$

donde la suma incluye un término por cada singularidad de f en Ω_R .

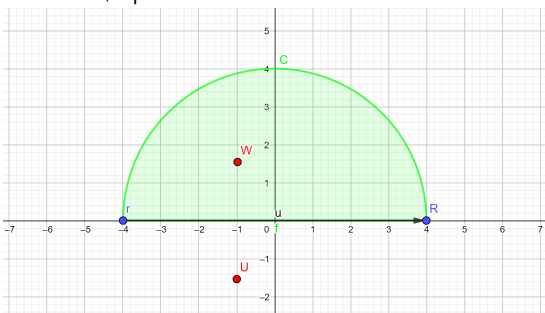
• El cálculo de las singularidades de f arroja la siguiente información: El denominador se anula en $w = -1 + i\sqrt{3}$; $\bar{w} = -1 - i\sqrt{3}$, es decir,

$$z^2 + 2z + 4 = (z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3}))$$

entonces $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4}$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \pm i\sqrt{3}\}$ y

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} \text{ tiene un polo de orden } m = 1 \text{ en } z = -1 + i\sqrt{3}$$

• $|-1 + i\sqrt{3}| = 2 < R$ entonces sólo $w = -1 + i\sqrt{3} \in \Omega_R$, porque \bar{w} no pertenece al semiplano superior:



$$\Gamma_R : [-R, R] \cup \gamma_R \text{ donde } \gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

• **Comprobación del orden del polo y cálculo del residuo de f en w :**

$$\begin{aligned} (\text{Res } f(z), w = -1 + i\sqrt{3}) &= \lim_{z_1 \rightarrow -1 + i\sqrt{3}} (z - (-1 + i\sqrt{3})) \cdot \frac{e^{iz}}{(z^2 + 2z + 4)} \\ &= \lim_{z_1 \rightarrow -1 + i\sqrt{3}} (z - (-1 + i\sqrt{3})) \cdot \frac{e^{iz}}{(z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3}))} \\ &= \lim_{z_1 \rightarrow -1 + i\sqrt{3}} \frac{e^{iz}}{(z - (-1 - i\sqrt{3}))} = \frac{e^{i(-1 + i\sqrt{3})}}{(2i\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \Omega_R} (\text{Res } f(z), z_1) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i(-1 + i\sqrt{3})}}{(2i\sqrt{3})} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-1 - \sqrt{3}}$$

Ejemplo 2. Calcular integrales impropias usando Teorema de los Residuos, en el caso de un integrando sin singularidades en \mathbb{R} .

Resolver $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx$.

Solución: Procederemos en cuatro etapas.

Etapas 1: Sabemos que $|e^{ix}| = 1$ pra todo $x \in \mathbb{R}$, y vale la acotación

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{ix}|}{|x^2 + 2x + 4|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x^2 + 2x + 4|} dx$$

donde la última converge por comparación con las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}$$

Por lo tanto, las integrales impropias

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx$$

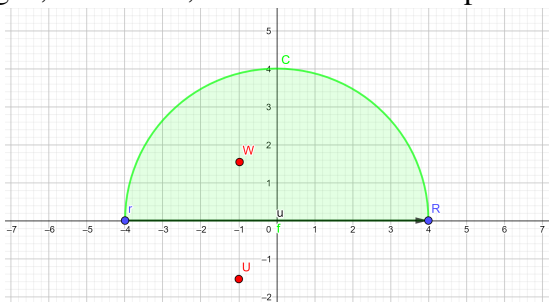
ambas convergen. Por esta razón, la integral impropia en $(-\infty, +\infty)$ se puede calcular como un solo límite, es decir, como **su valor principal**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx$$

Etapas 2: Consideremos ahora un función **nueva** $f(z)$ de variable compleja, tal que si $z = x \in \mathbb{R}$ entonces $f(z)$ coincide con el integrando:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4}$$

Sea la curva cerrada definida como el segmento $[-R, R]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen, de radio R , contenida en el semiplano superior:



$$\Gamma_R : [-R, R] \cup \gamma_R \quad \text{donde} \quad \gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

$$\Omega_R: \text{semicírculo apoyado sobre el eje real, de radio } R.$$

Siempre que $R > 2$, el **ejemplo 1** nos dice el resultado de la integral a lo largo de Γ_R :

$$\int_{[-R,R] \cup \gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \Omega_R} (Res f(z), z_k) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i-\sqrt{3}}$$

donde la suma incluye un término por cada **singularidad** que f tenga en el **semiplano superior**, es decir:

R es mayor que el módulo de todas las singularidades del semiplano superior

Además, la integral anterior, a lo largo de la curva cerrada, se descompone como la suma:

$$\int_{[-R,R] \cup \gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz$$

$$= 2\pi i \sum_{z_k \in \Omega_R} (\text{Res } f(z), z_k) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i-\sqrt{3}}$$

Etapa 3: Tomemos límite cuando $R \rightarrow +\infty$ en la suma anterior, observando que el primer término tiende a la integral impropia que queremos calcular, y el segundo va a tender a cero como veremos en la **etapa 4**, mientras que la sumatoria y su resultado quedan igual porque no dependen de R :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R,R] \cup \gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx + \underbrace{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz}_{\rightarrow 0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx$$

$$= 2\pi i \sum_{z_k \in \text{sem. superior}} (\text{Res } f(z), z_k) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i-\sqrt{3}}$$

Etapa 4: Justifiquemos que en el límite cuando $R \rightarrow +\infty$ el segundo término tiende a cero:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = 0$$

Esto es consecuencia del **lema de Jordan** para la función que multiplica a la exponencial, $h(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 4}$:

$$\begin{aligned} \lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} |h(z)| &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z^2 + 2z + 4|} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z^2| |1 + 2/z + 4/z^2|} \\ &= \lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2 |1 + 2/z + 4/z^2|} = 0 \end{aligned}$$

entonces el **lema de Jordan** (que se muestra más adelante) asegura:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz} \cdot h(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = 0 \quad \checkmark$$

Demostremos en este caso que **la integral que agregamos, sobre la semicircunferencia del semiplano superior, tiende a cero, cuando $R \rightarrow +\infty$** . Evaluemos primero el integrando sobre la curva parametrizada por $z(t) = Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$ con $\frac{dz}{dt} = z'(t) = Rie^{it}$

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz = \frac{e^{R(-\sin t + i \cos t)}}{R^2(1 + \frac{2}{R} + \frac{4}{R^2})} Rie^{it} dt$$

entonces

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 4} dz \right| = \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{R(-\sin t + i \cos t)}}{R^2(1 + \frac{2}{R} + \frac{4}{R^2})} Rie^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|e^{R(-\sin t + i \cos t)}|}{R^2(1 + \frac{2}{R} + \frac{4}{R^2})} |Rie^{it}| dt = \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin t}}{(1 + \frac{2}{R} + \frac{4}{R^2})} dt \leq \frac{1}{R} e^0 \pi \rightarrow 0_{(R \rightarrow +\infty)}$$

pues $e^{-R \sin t} \leq e^0 = 1$ dado que si $0 \leq t \leq \pi \Rightarrow -1 \leq -\sin(t) \leq 0 \quad \checkmark$

Ejemplo 3. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 4} dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x + 4} dx$.

Solución: Sabemos que si $x \in \mathbb{R}$ entonces la descomposición en parte real e imaginaria de e^{ix} es

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x)$$

En consecuencia,

$$\frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 4} = \mathbf{Re} \left(\frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x + 4} = \mathbf{Im} \left(\frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} \right)$$

Por lo tanto, tomemos parte real e imaginaria, respectivamente, en el resultado del ejemplo 2:

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 4} dx = \mathbf{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx \right) = \mathbf{Re} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i-\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\sqrt{3}} \cos(1)$$

y

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x + 4} dx = \mathbf{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 4} dx \right) = \mathbf{Im} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i-\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\sqrt{3}} \text{sen}(-1) \quad \checkmark$$

Resumamos este procedimiento y sus justificaciones en la siguiente proposición, que incluye otros casos también.

Proposición: Resolución de integrales reales a partir del Teorema de los Residuos.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, salvo por una cantidad finita de polos $\{z_1, \dots, z_N\}$ ninguno de ellos en \mathbb{R} y supongamos que U contiene al semiplano superior. Supongamos que f satisface algunas de las siguientes hipótesis:

i) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, con $P(z) = a_N z^N + \dots + a_0$ y $Q(z) = b_K z^K + \dots + b_0$ cada uno de ellos una suma finita de potencias racionales tales que $K - N > 1$.

ii) $f(z)$ cumple

$$\lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} |z \cdot f(z)| = 0$$

iii) **Lema de Jordan.** La función f es de la forma $f(z) = e^{aiz} \cdot h(z)$, con $a > 0$ y el factor h que multiplica a la exponencial verifica

$$\lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} |h(z)| = 0$$

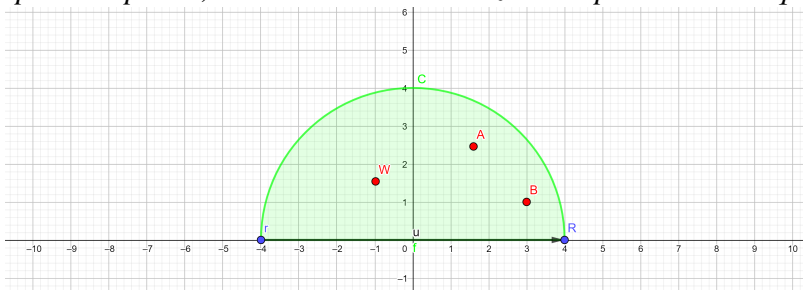
Entonces, en casos i, ii ó iii

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

En el item iii), esto significa

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{aiz} \cdot h(z) dz = 0$$

donde la curva abierta es la semicircunferencia centrada en el origen, de radio R , contenida en el semiplano superior, recorrida una sola vez desde $p = -R$ hasta $q = R$:



$$\gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

Más aún, si consideremos $f(x)$ a la función evaluada en $z = x \in \mathbb{R}$ y llamamos Ω_R al semicírculo de centro 0, apoyado sobre el eje real, de radio R , contenido en el semiplano superior; es decir, a la región cuya frontera es la curva cerrada dada por el segmento real $[-R, R]$ seguido de γ_R , entonces, si la siguiente integral impropia es convergente, lo hace a su valor principal que se obtiene como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{semiplano superior}} (\text{Res } f(z), z_k)$$

donde la sumatoria incluye un término por cada singularidad que $f(z)$ tenga en el semiplano superior.

En el item iii), esto significa $f(x) = e^{aix} \cdot h(x)$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{aix} \cdot h(x) dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{semiplano superior}} (\text{Res } f(z), z_k) \checkmark$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA DE JORDAN

Notar primero que en \mathbb{C} :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = 0 \iff \lim_{R \rightarrow +\infty} |I(R)| = 0$$

En este caso, queremos ver que el límite de la integral a lo largo de la semicircunferencia (curva abierta) $\gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ es cero. Calculemos entonces

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} |I(R)| &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{aiz} \cdot h(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} |e^{aiz} \cdot h(z)| dz \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |e^{aiR(\cos(t)+i \operatorname{sen}(t))}| \cdot |h(Re^{it})| |iRe^{it}| dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |e^{aiR(\cos(t)+i \operatorname{sen}(t))}| \cdot |h(Re^{it})| R dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |e^{-aR \operatorname{sen}(t)}| \cdot |h(Re^{it})| R dt (*) \end{aligned}$$

• Sabemos por hipótesis que existe $M_R := \max \{|h(z)| : |z| = R\}$, esto es, por la continuidad de la función en el compacto $|z| \leq R$, existe el máximo y éste tiende a cero lo mismo que la función, es decir:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |h(Re^{it})| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} M_R = 0$$

• $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen}(\pi) \cos(-t) + \cos(\pi) \operatorname{sen}(-t) = (-1)(-\operatorname{sen}(t)) = \operatorname{sen}(t)$, luego, la integral es dos veces la integral en la primera mitad del intervalo

Por lo tanto, (*)

$$\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |e^{-aR \operatorname{sen}(t)}| \cdot M_R R dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} 2R \cdot M_R \int_0^{\pi/2} |e^{-aR \operatorname{sen}(t)}| dt (**)$$

• $\operatorname{sen}(t)$ es cóncava hacia abajo en $[0, \pi/2]$, por lo tanto, su gráfico se encuentra por encima del segmento que une los puntos inicial y final, es decir: $\operatorname{sen}''(t) = \cos'(t) = -\operatorname{sen}(t) < 0 \forall t \in [0, \pi/2]$,

• Punto inicial: $P = (0, 0)$

• Punto final: $P = (\frac{\pi}{2}, 1) \Rightarrow \operatorname{sen}(t) \geq \frac{2}{\pi} t \forall t \in [0, \pi/2] \Rightarrow -\frac{2}{\pi} t \leq -\operatorname{sen}(t) \forall t \in [0, \pi/2]$

$$\Rightarrow e^{-aR \operatorname{sen}(t)} \leq e^{-\frac{2aRt}{\pi}} \forall t \in [0, \pi/2]$$

Tomando primitiva del integrando que queda, concluimos que:

$$\begin{aligned} (**) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} 2R \cdot M_R \int_0^{\pi/2} \left(e^{-\frac{2aRt}{\pi}} \right) dt = -\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2aR} 2R \cdot M_R \left(e^{-\frac{2aRt}{\pi}} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{a} \cdot M_R (1 - e^{-aR}) \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{a} \cdot M_R \rightarrow 0 \checkmark \end{aligned}$$

**RESOLUCIÓN DE INTEGRALES REALES
TRANSFORMADAS DE FOURIER**

Ejemplo 4 de Adicionales Práctica 7, campus. a) Cálculo Auxiliar. Probar que la integral de la función Gaussiana vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Solución: Calculemos una integral que veremos está relacionada con la anterior:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

Luego, tomemos raíz cuadrada a ambos miembros:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} (*)$$

Por otra parte, podemos resolver en coordenadas polares en el plano con $J = r$:

$$\begin{aligned} (*) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right] dr = \int_0^{+\infty} [2\pi e^{-r^2} r] dr \\ &= -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R [e^{-r^2} (-2r)] dr = -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=R} = -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-R^2} - 1] = \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral que buscamos es la raíz cuadrada de la anterior:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \checkmark$$

b) Comprobar el valor de la siguiente Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-iwx} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

Solución: Vamos a probar el ejercicio para $w > 0$; el caso $w = 0$ es el cálculo auxiliar anterior. El caso $w < 0$ queda como ejercicio para el lector.

Sea $w > 0$. Calculemos primero el integrando completando cuadrados:

$$e^{-x^2} e^{-iwx} = e^{-(x+i\frac{w}{2})^2} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

luego la integral que uno quiere es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-iwx} dx = e^{-\frac{w^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{w}{2})^2} dx}_I (*)$$

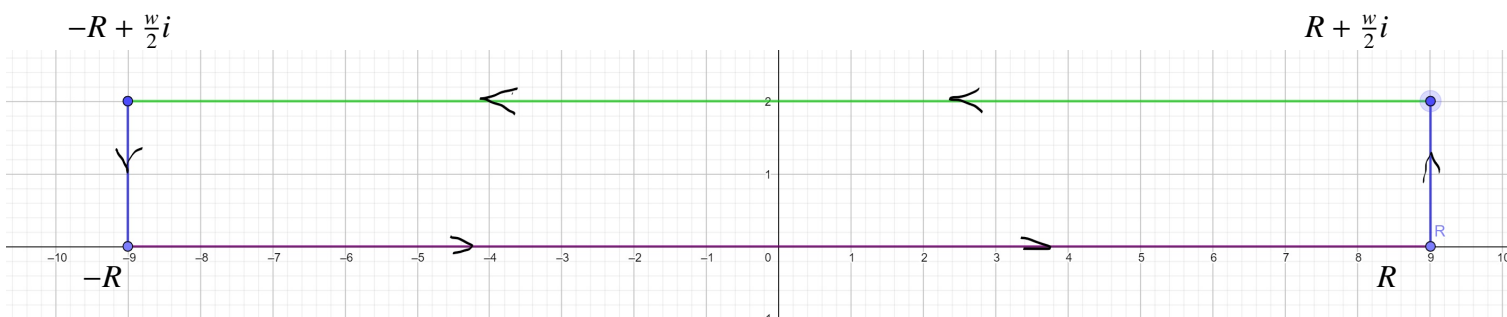
Para calcular esta integral vamos a considerar la función de variable compleja, **holomorfa en todo \mathbb{C}**

$$f(z) = e^{-z^2}$$

y su integral a lo largo de la curva cerrada σ_R , positivamente orientada, de la cual la integral en el segmento real $[-R, R]$ es el primer término y **la integral en total da cero**.

Sea σ_R la concatenación de las sgtes:

- segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$,
- seguido del segmento vertical $\ell_1(t) = R + it : 0 \leq t \leq \frac{w}{2}$,
- seguido del segmento horizontal (con orientación opuesta) $\ell_2(t) = t + \frac{w}{2}i : -R \leq t \leq R$ y finalmente
- el segmento vertical (con orientación opuesta) $\ell_3(t) = -R + it : 0 \leq t \leq \frac{w}{2}$



$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int_{\sigma} e^{-z^2} dz = \int_{[-R,R]} e^{-x^2} dx + \int_{\ell_1} e^{-z^2} dz - \int_{\ell_2} e^{-z^2} dz - \int_{\ell_3} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + \underbrace{\int_0^{\frac{w}{2}} e^{-(R+it)^2} dt}_{(*) \text{ tiende } \rightarrow 0} - \int_{-R}^R e^{-(t+i\frac{w}{2})^2} dt - \underbrace{\int_0^{\frac{w}{2}} e^{-(-R+it)^2} dt}_{(*) \text{ tiende } \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Al tomar límite cuando $R \rightarrow +\infty$ y pasar de miembro, queda:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + 0 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-(t+i\frac{w}{2})^2} dt + 0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\frac{w}{2})^2} dt \\ \Rightarrow I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\frac{w}{2})^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-iwx} dx = e^{-\frac{w^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{w}{2})^2} dx}_I = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

Observación: Esta integral es la Transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$:

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(w) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

(*) **Cálculo Auxiliar:** Veamos por qué los dos términos (*) tienden a cero: $\int_0^{\frac{w}{2}} e^{-(\pm R+it)^2} dt \rightarrow 0$. El exponente es

$$-(\pm R + it)^2 = -(R^2 \pm 2Rit - t^2) = -R^2 \pm 2Rit + t^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \left| \int_0^{\frac{w}{2}} e^{-(\pm R+it)^2} dt \right| \leq \int_0^{\frac{w}{2}} |e^{-(\pm R+it)^2}| dt = e^{-R^2} \int_0^{\frac{w}{2}} |e^{-2Rit} e^{t^2}| dt \\ &= e^{-R^2} \int_0^{\frac{w}{2}} 1 \cdot e^{t^2} dt \leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{w}{2}} e^{(\frac{w}{2})^2} dt = \frac{w}{2} e^{-R^2} e^{(\frac{w}{2})^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

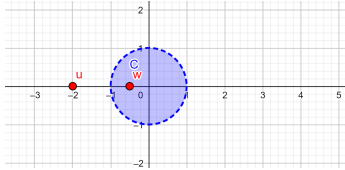
**RESOLUCIÓN DE INTEGRALES
DE SENOS Y COSENOS**

Ejemplo 4. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt$$

Solución. • El integrando está bien definido y es una función continua en $[0, 2\pi] \implies$ la integral es una integral usual de Riemann (no es impropia).

• No conocemos su primitiva \implies cambio de variable a una integral compleja:



$z = e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \implies |z| = 1$ se recorre una vez en sentido positivo

$$\implies \begin{cases} \bar{z} = e^{-it} = \frac{1}{z} \\ dt = \frac{dz}{iz} \end{cases}$$

• $\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2 + 1}{2z}$

$$\implies 5 + 4 \cos t = 5 + 4 \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{5z + 2z^2 + 2}{z}$$

$$\implies \left(\frac{1}{5 + 4 \cos t} \right) dt = \left(\frac{z}{5z + 2z^2 + 2} \right) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i} \frac{1}{\left(\frac{5}{2}z + z^2 + 1\right)} dz$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1} dz$$

- **Singularidades** = $\{z \in \mathbb{C} : z^2 + \frac{5}{2}z + 1\} = \{w = -\frac{1}{2}; u = -2\}$
- **Denominador de f tiene un CERO de orden $m = 1$ en $w = -\frac{1}{2}; u = -2$**
- **f tiene un POLO de orden $m = 1$ en $w = -\frac{1}{2}; u = -2$**
- **$u = -2 \notin \Omega : |z| < 1$**
- **Comprobación del orden del polo y cálculo del residuo de f en w :**

$$\operatorname{Res}\left(f, w = -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\cancel{z + \frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\left(\cancel{z + \frac{1}{2}}\right)(z + 2)} = \frac{2}{3}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1} dz = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f, w = -\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3} \checkmark$$

Ejemplo 5. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos^2 t} dt$$

Solución.

- El integrando está bien definido y es una función continua en $[0, 2\pi] \implies$ integral real usual
- $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$
- Cambio de variable $z = e^{2it} : 0 \leq t \leq 2\pi$

\implies la curva parametrizada recorre dos veces la circunferencia unidad

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\implies \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z^2 + 1}{2z}\right) = \frac{1}{4z}(2z + z^2 + 1)$$

$$\implies 2 + \cos^2 t = 2 + \frac{1}{4z}(2z + z^2 + 1) = \frac{(10z + z^2 + 1)}{4z}$$

• **Integrando:**

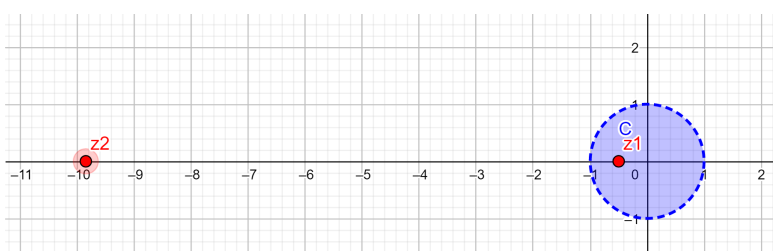
$$\frac{1}{2 + \cos^2 t} dt = \frac{4z}{(10z + z^2 + 1)} \frac{dz}{2iz} = \frac{2}{i} \frac{1}{(10z + z^2 + 1)} dz$$

- **Singularidades** = $\{z \in \mathbb{C} : z^2 + 10z + 1 = 0\} = \{z = -5 \pm 2\sqrt{6}\}$
- **Denominador tiene un CERO de orden $m = 1$** en cada $z = -5 \pm 2\sqrt{6}$
- **f tiene un POLO de orden $m = 1$** en $z = -5 \pm 2\sqrt{6}$
- Si $\Omega : |z| < 1$, entonces $z_2 = -5 - 2\sqrt{6} \notin \Omega$ pues

$$|-5 - 2\sqrt{6}| = 5 + 2\sqrt{6} > 5 > 1$$

- La singularidad $z_1 = -5 + 2\sqrt{6} \in \Omega$ pues

$$4 < 6 < 9 \implies 2 < \sqrt{6} < 3 \implies 4 < 2\sqrt{6} < 6 \implies -1 < -5 + 2\sqrt{6} < 1$$



- Comprobación del orden del polo y cálculo del residuo de f en z_1 :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(f, z_1 = -5 + 2\sqrt{6}) &= \lim_{z \rightarrow -5 + 2\sqrt{6}} (z - (-5 + 2\sqrt{6})) \cdot f(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow -5 + 2\sqrt{6}} (z - (-5 + 2\sqrt{6})) \cdot \frac{1}{(z - (-5 + 2\sqrt{6}))(z + 5 + 2\sqrt{6})} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -5 + 2\sqrt{6}} \cancel{(z - (-5 + 2\sqrt{6}))} \cdot \frac{1}{\cancel{(z - (-5 + 2\sqrt{6}))}(z + 5 + 2\sqrt{6})} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -5 + 2\sqrt{6}} \frac{1}{(z + 5 + 2\sqrt{6})} = \frac{1}{4\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos^2 t} dt = \int_{|z|=1} \frac{2}{i} \frac{1}{(10z + z^2 + 1)} dz$$

la curva se recorre dos veces $\rightarrow 2 \cdot \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = 8\pi \cdot \frac{1}{4\sqrt{6}}$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{6}} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \checkmark$$

Ejemplo 6. **SABIENDO QUE ES CONVERGENTE, CALCULAR** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx$

Solución: Etapa 1. Recordemos la identidad para reescribir el integrando de forma conveniente

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

entonces nos queda **una suma de dos integrales impropias**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces la descomposición en parte real e imaginaria de e^{2xi} es

$$e^{2xi} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

En consecuencia,

$$\frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \mathbf{Re} \left(\frac{e^{2xi}}{(x^2 + 1)^2} \right)$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2xi}}{(x^2 + 1)^2} dx \right)$$

Etapa 2: Resolvamos la segunda integral. Consideremos ahora un función **nueva** $f(z)$ de variable compleja, tal que si $z = x \in \mathbb{R}$ entonces $f(z)$ coincide con el integrando:

$$f(z) = \frac{e^{2zi}}{(z^2 + 1)^2}$$

Sea la curva cerrada definida como el segmento $[-R, R]$ seguido de la semicircunferencia centrada en el origen, de radio R , contenida en el semiplano superior:

$$\Gamma_R : [-R, R] \cup \gamma_R \quad \text{donde} \quad \gamma_R : z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

Llamemos Ω_R a la región cuya frontera es la curva anterior, es decir, el semicírculo apoyado sobre el eje real, de radio R suficientemente grande, el resultado de la integral a lo largo de la curva cerrada Γ_R :

$$\int_{[-R, R] \cup \gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \Omega_R} (\text{Res } f(z), z_k)$$

donde la suma incluye un término por cada **singularidad de f en el semiplano superior**.

Raíces del denominador $z = i; z = -i \notin$ semiplano superior:

- f tiene un polo de orden $m = 2$ en $z = i \in$ semiplano superior, pues

$$\lim_{z \rightarrow i} \left((z - i)^2 \cdot \frac{e^{2zi}}{(z^2 + 1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i)^2 \cdot \frac{e^{2zi}}{(z - i)^2(z + i)^2} \right) = \frac{-1}{4e^2}$$

- Calculemos el residuo:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z = i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2 e^{2zi}}{(z^2+1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \cdot \frac{e^{2zi}}{(z-i)^2(z+i)^2} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{2zi}}{(z+i)^2} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{e^{2zi} [2i(z+i)^2 - 2(z+i)]}{(z+i)^4} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{2i e^{2zi} (z+2i)}{(z+i)^3} \right) \\
 &= \frac{2i e^{-2(3i)}}{(2i)^3} = \frac{-3i}{4e^2}
 \end{aligned}$$

La integral anterior, a lo largo de la curva cerrada, se descompone como la suma:

$$\int_{[-R,R] \cup \gamma_R} \frac{1}{2} \frac{e^{2zi}}{(z^2+1)^2} dz = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{e^{2xi}}{(x^2+1)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2zi}}{(z^2+1)^2} dz$$

Etapa 3: Tomemos límite cuando $R \rightarrow +\infty$ en la suma anterior, observando que el primer término tiende a la integral impropia que queremos calcular, y el segundo va a tender a cero como veremos en la *etapa 4*, mientras que la sumatoria y su resultado quedan igual porque no dependen de R :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{2ix}}{(x^2+1)^2} dx + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2} 2\pi i (\text{Res } f(z), z = i) \\
 &= \pi i \cdot \frac{-3i}{4e^2} = \frac{3\pi}{4e^2}
 \end{aligned}$$

Etapa 4: Justifiquemos que en el límite cuando $R \rightarrow +\infty$ el segundo término tiende a cero:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0$$

Esto es consecuencia del **lema de Jordan** para la función que multiplica a la exponencial, $h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} |h(z)| &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|(z^2+1)^2|} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z^4| |(1+1/z^2)^2|} \\
 &= \lim_{|z|=R, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^4 |(1+1/z^2)^2|} = 0
 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{2iz} \cdot h(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0$$

Etapa 5: Resolución de la primera integral.

- Raíces del denominador $z = i; z = -i \notin$ semiplano superior.
- h tiene un polo de orden $m = 2$ en $z = i \in$ semiplano superior, con residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(h, z = i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{-2}{(z + i)^3} \right) \\ &= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-1}{4(-i)} = \frac{-i}{4} \end{aligned}$$

Por los mismos argumentos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz \\ &= \frac{1}{2} 2\pi i (\text{Res } h(z), z = i) \\ &= \pi i \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Conclusión: Finalmente, la integral original es la suma de ambas:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4e^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. **SABIENDO QUE ES CONVERGENTE, CALCULAR** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$ SI $0 < a < 1$.

Solución, sólo el planteo: Queremos calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$$

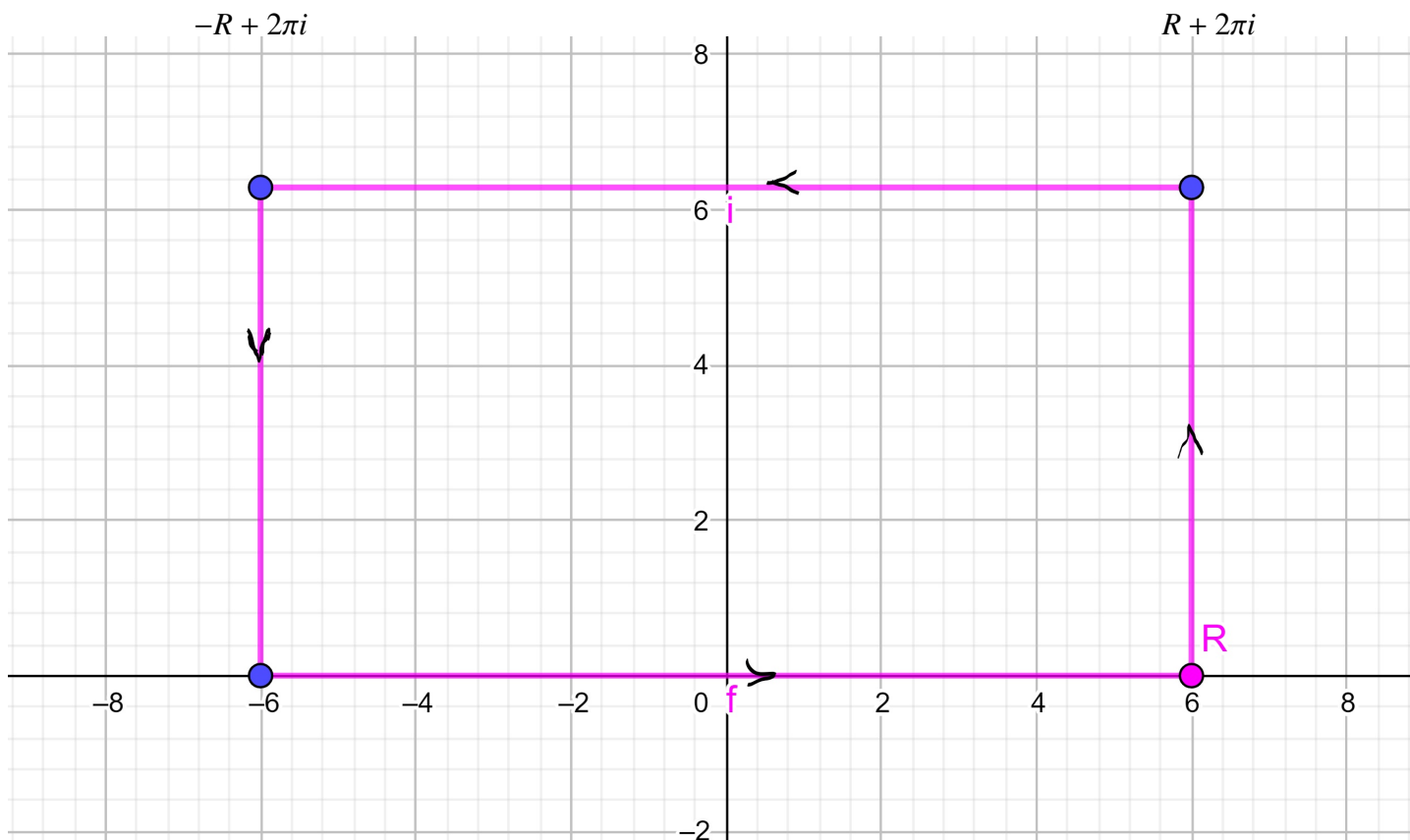
Para ésto, consideremos la integral de línea compleja de $f(z) = \frac{e^{az}}{e^z + 1}$ a lo largo de la curva cerrada σ_R ,

positivamente orientada, de la cual la integral en el segmento real $[-R, R]$ es el primer término.

Sea σ_R la concatenación de las sgtes:

- segmento $[-R, R] \subset \mathbb{R}$,
- seguido del segmento vertical $\ell_1(t) = R + 2\pi ti : 0 \leq t \leq 1$,
- seguido del segmento horizontal $\ell_2(t) = R - 2tR + 2\pi i : 0 \leq t \leq 1$ y finalmente
- el segmento vertical $\ell_3(t) = -R + 2\pi i - 2\pi it : 0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow \int_{\sigma} f(z) dz = \int_{[-R,R]} f(x) dx + \int_{\ell_1} f(z) dz + \int_{\ell_2} f(z) dz + \int_{\ell_3} f(z) dz$$



Singularidades de $f(z) = \frac{e^{az}}{e^z + 1}$, $0 < a < 1$:

$$-1 = e^z \iff z = (2k + 1)\pi i$$

$$\Rightarrow \text{Singularidades}(f) = \{z_k = (2k + 1)\pi i\}$$

Infinitas de ellas, todos los $z_k \in$ semiplano superior $\forall k \geq 1$: **la integral no se puede resolver integrando en el semiplano superior como en los ejemplos anteriores.**

Pero, en cambio, nos interesa el rectángulo de la figura, que incluye la **única singularidad $z_0 = \pi i$** , en el cual tomaremos el límite cuando $R \rightarrow +\infty$; nuestra región Ω es **la franja horizontal no acotada hacia los lados**:

$$\Omega := \{z = x + yi : 0 < y < 2\pi\}$$

Residuo:

$$Res(f, z_0 = \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{e^z + 1} = e^{a\pi i} \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{(z - \pi i)}{e^z + 1} = e^{a\pi i} \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{1}{e^z} = -e^{a\pi i} \quad 0 < a < 1$$

Luego, **la integral compleja vale**

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 2\pi i Res(f, z_0 = \pi i) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

$$= \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{\ell_1} f(z) dz + \int_{\ell_2} f(z) dz + \int_{\ell_3} f(z) dz$$

Calculemos cada término y veamos que:

- La integral a lo largo de cada uno de los segmentos verticales tiende a cero cuando $R \rightarrow +\infty$
- La integral a lo largo del segmento horizontal a la altura de $2\pi i$ **es un múltiplo de la integral en $[-R, R]$**

Empecemos por éste cálculo:

- Integral a lo largo del segmento horizontal a la altura de $2\pi i$:

$$\begin{aligned} \int_{\ell_2} f(z) dz &= \int_0^1 f(R - 2tR + 2\pi i) \cdot (-2R) dt \\ &= -2R \int_0^1 \frac{e^{a(1-2t)R}}{e^{(1-2t)R} + 1} dt \text{ ETC} \end{aligned}$$