COMPLEMENTO PRÁCTICA 9 - EJERCICIOS 7 - 9
TRANSFORMADA DE FOURIER

Ejercicio 1. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Usando este resultado calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt$.

Demostración: Empecemos calculando la transformada de Fourier de $\chi_{[-1,1]}$. La transformada es por definición:

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-itx}\, dx$$

Observemos que el integrando que tenemos es igual a e^{-itx} si $x \in [-1,1]$, y es 0 si x está afuera de este intervalo. Podemos entonces reescribir esta integral de la siguiente manera:

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-itx}\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-itx}\, dx$$

En el caso de tener $t \neq 0$ $\frac{e^{-itx}}{-it}$ es una primitiva del integrando, y por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{[-1,1]}(t) &= \left.\frac{e^{-itx}}{-it}\right|_{x=-1}^{1} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \\ &= \frac{2\sin(t)}{t}. \end{aligned}$$

por otro lado la transformada en cero es:

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(0) = \int_{-1}^{1} e^{-it0}\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

Observación 0.1. Notemos que $\lim_{t\to 0} \frac{2\sin(t)}{t} = 2$, de modo que la transformada de Fourier de $\chi_{[-1,1]}$ resulta una función continua. Por otro lado también es claro que su transformada es una función de $L^2(\mathbb{R})$, sin embargo puede probarse con un poco de trabajo que esta función no pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

La primer integral que queremos encontrar es entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\hat{\chi}_{[-1,1]}(t)}{2}\right|^2 dt$. Podemos entonces calcular esta integral usando la identidad de Plancherel-Parseval, recordemos su enunciado:

Teorema (Identidad de Plancherel-Parseval). Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Aplicándolo en este caso tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\hat{\chi}_{[-1,1]}(t)}{2}\right|^2 dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{2}\right|^2 dx$$

La definición de la función $\chi_{[-1,1]}$ nos dice que el integrando es $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ cuando $x \in [-1,1]$ y es 0 en otro caso, de modo que la integral es:

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{2}\right|^2 dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\,dx = \pi,$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \pi.$$

Como la segunda integral que queremos calcular tiene la función elevada a la cuarta y no al cuadrado, si queremos aplicar la identidad de Plancherel-Parseval para calcularla necesitaríamos encontrar una función f tal que $\hat{f}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$. En tal caso tendríamos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\right)^2 dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(x)|^2\,dx\\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

Como tenemos $\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = \left(\frac{\hat{\chi}_{[-1,1]}(t)}{2}\right)^2$, es decir que la función es un producto de dos transformadas, podemos escribirla como la transformada de la convolución de estas mismas funciones. Es decir que tenemos:

$$4\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = \mathcal{F}\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)(t).$$

Calculemos entonces la convolución de la función $\chi_{[-1,1]}$ consigo misma. Por definición de la convolución tenemos:

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,1]}(y)\chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy$$

Igual que como habíamos hecho antes esta integral se puede escribir:

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-1}^{1}\chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy$$

Este integrando vale 1 si $x-y \in [-1,1]$, es decir si $y \in [x-1, x+1]$. Notemos que cuando $x > 2$ entonces $x-1$ es mayor que 1, y por lo tanto para todo y en el intervalo en el que integramos el integrando es 0. Análogamente si $x < -2$ tenemos que $x+1 < -1$, y de nuevo el integrando es siempre 0. Por otro lado si tenemos $0 < x < 2$, entonces $x-1$ es menor que 1 y por lo tanto hay valores de y para los que el integrando no se anula, tenemos en este caso:

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-1}^{1}\chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy = \int_{x-1}^{1}1\,dy = 2-x, \qquad \forall x \in [0,2].$$

De la misma manera cuando tenemos $-2 < x < 0$, entonces $x+1$ es mayor a -1 y nuevamente hay valores de y para los que el integrando no es 0, tenemos entonces:

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = \int_{-1}^{1} \chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy = \int_{-1}^{x+1} 1\,dy = 2+x, \qquad \forall x \in [-2,0].$$

En conclusión tenemos que:

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 2+x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2-x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

y sabemos que su transformada de Fourier cumple:

$$\mathcal{F}\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)(t) = \left(\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(t)\right)^2 = 4\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$$

Escribiendo $f(x) = \frac{\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x)}{4}$, tenemos entonces que $\hat{f}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$, y tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx \\ &= \frac{2\pi}{16}\left(\int_{-2}^{0} (2+x)^2\,dx + \int_{0}^{2} (2-x)^2\,dx\right) \\ &= \frac{\pi}{8}\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2. Calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}\sin(2t)}{t^2}\,dt.$$

Demostración: Para resolver este ejercicio vamos a usar la siguiente versión más general de la identidad de Plancherel-Parseval:

Teorema (Identidad de Plancherel-Parseval). Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

En este caso podemos escribir el integrando separandolo como un producto de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}}{t} \cdot \frac{\sin(2t)}{t}\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}}{t} \cdot \overline{\frac{\sin(2t)}{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(t)e^{-it}}{t} \cdot \overline{\frac{2\sin(2t)}{2t}}\,dt \end{aligned}$$

Si f y g son tales que $\hat{f}(t) = \frac{2\sin(t)e^{-it}}{t}$ y $\hat{g}(t) = \frac{2\sin(2t)}{2t}$, podemos calcular la integral como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}\sin(2t)}{t^2}\,dt = \pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Para encontrar las funciones f y g observemos que sus transformadas se pueden obtener de $h(t) = \frac{2\sin(t)}{t}$ como $\hat{f}(t) = h(t)e^{-it}$ y $\hat{g}(t) = h(2t)$, y recordemos que sabemos que valen las siguientes propiedades para la transformada:

Proposición. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que:

(1) si $g(x) = f(ax)$ con $a \neq 0$, entonces $\hat{g}(t) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$,

(2) si $g(x) = f(x+b)$, entonces $\hat{g}(t) = e^{ibt}\hat{f}(t)$.

En nuestro caso sabemos que la transformada de $\chi_{[-1,1]}(x)$ es $h(t)$. Si queremos que la transformada de $f(x)$ sea $h(t)e^{-it}$, usando el segundo item de la proposición anterior con $b = -1$, tenemos que podemos tomar $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x-1)$. Por otro lado queremos que la transformada de $g(x)$ sea $h(2t)$, por lo tanto usando el primer item de la proposición con $a = \frac{1}{2}$, tenemos que podemos tomar $g(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Tenemos entonces que la integral que queremos calcular es:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}\sin(2t)}{t^2}\,dt &= \pi\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x-1)\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x-1)\chi_{[-1,1]}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx\end{aligned}$$

Como el factor $\chi_{[-1,1]}(x-1)$ es 1 si $x \in [0,2]$ y 0 en otro caso, y el factor $\chi_{[-1,1]}\left(\frac{x}{2}\right)$ es 1 si $x \in [-2,2]$, y 0 en otro caso, el producto de ambos va a ser 1 cuando x est en el intervalo $[0,2]$ y 0 en otro caso. Es decir que tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-it}\sin(2t)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^2 1\,dx = \pi.$$

□

Ejercicio 3. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-y)e^{-(x-y)}}{y^2+1}\,dy.$$

Demostración: Observemos que esta función tiene una definición similar a la de la convolución de las funciones $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $h(x) = xe^{-|x|}$. Esta convolución es:

$$h * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)e^{-|x-y|}\cdot\frac{1}{y^2+1}\,dy,$$

Observemos que en la región de integración de la definición de f tenemos que $y < x$, por lo que $|x-y| = x-y$, de modo que los integrandos coinciden en esa región. Notemos también que si el exponente en la función h no tuviera el módulo, la convolución no estaría bien definida. La única diferencia entre estas dos expresiones está entonces en los límites de integración. Para poder escribir esta función como una convolución, lo que vamos a hacer es cambiar la función h por una función $\tilde{h}$ que coincida con la anterior en la parte que está en las dos integrales pero se anule en el resto. Como notamos antes queremos que el integrando se anule precisamente cuando $x - y < 0$, por lo que vamos a definir:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si calculamos la convolución de g con esta nueva función obtenemos lo siguiente:

$$\tilde{h} * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x-y)g(y)\,dy,$$

cuando $y \geq x$, tenemos que $(x - y)$ es negativo y por lo tanto el integrando es 0, luego esta integral es:

$$\begin{aligned} \tilde{h} * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \tilde{h}(x-y)g(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} (x-y)e^{-(x-y)} \cdot \frac{1}{y^2+1}\,dy = f(x). \end{aligned}$$

Podemos ahora calcular la transformada de la función f usando el teorema de la convolución, tenemos:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \mathcal{F}(\tilde{h} * g)(t) = \mathcal{F}(\tilde{h})(t)\mathcal{F}(g)(t)$$

Tenemos que calcular entonces las transformadas de estas dos funciones. El cálculo de la transformada de la función $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, se puede hacer usando residuos, y es el ejercicio 5.c de la práctica 9. El resultado que uno obtiene es:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(t) = \pi e^{-|t|}.$$

Para la función $\tilde{h}$, consideremos la función:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

tenemos entonces que $\tilde{h}(x)$ es $xH(x)$, de modo que su transformada la podemos obtener como:

$$\mathcal{F}(\tilde{h}(x))(t) = \mathcal{F}(xH(x))(t) = i\hat{H}'(t)$$

Por último la transformada de H la podemos calcular directamente de la definición como:

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-itx}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-itx}\,dx \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+it)}\,dx = \frac{1}{1+it}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $\mathcal{F}(\tilde{h})(t) = i\frac{-i}{(1+it)^2}$, y el resultado final es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(t) &= \mathcal{F}(\tilde{h})(t)\mathcal{F}(g)(t) \\ &= \frac{\pi e^{-|t|}}{(1+it)^2} \end{aligned}$$

$\square$