COMPLEMENTO PRÁCTICA 9 - EJERCICIOS 1 A 6
TRANSFORMADA DE FOURIER

- Denotamos por $G(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrables en $\mathbb{R}$.
- La convolución de dos funciones $f, g \in G(\mathbb{R})$ se define por
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy.$$
- Si $f \in G(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier de define por
$$\mathcal{F}(f)(t) = \widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx.$$

Ejercicio 1. Probar las siguientes propiedades:
a) Si $f \in G(\mathbb{R})$, $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\widehat{f}$ es derivable y $(\widehat{f}\,)'(t) = \widehat{g}(t)$.
b) Si $f, f' \in G(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{(f')}(t) = it\widehat{f}(t)$.

a) Como $f \in G(\mathbb{R})$, tenemos que
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-ixt}\right|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty,$$
es decir,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx$$
converge para todo $t \in \mathbb{R}$. Además,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(f(x)\,e^{-ixt}\right)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)\,e^{-ixt}\,dx$$
converge uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$ pues g es absolutamente integrable. Por lo tanto, $\widehat{f}$ es derivable y podemos derivar bajo el signo de la integral obteniendo que:
$$\begin{aligned}(\widehat{f}\,)'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ixt}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(f(x)\,e^{-ixt}\right)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)\,e^{-ixt}\,dx = \widehat{g}(t).\end{aligned}$$

b) (Ya visto en la teórica) Notemos que f satisface
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
ya que
$$\int_{0}^{\infty} f'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0)$$
y por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe y es finito. Como f es absolutamente integrable, este límite debe ser cero. Análogamente se puede ver que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Ahora,

$$\widehat{(f')}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixt}\,dx = \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} f'(x)e^{-ixt}\,dx.$$

Integrando por partes tenemos que

$$\int_{-A}^{B} f'(x)e^{-ixt}\,dx = \left[f(B)e^{-iBt} - f(-A)e^{iAt}\right] + it\int_{-A}^{B} f(x)e^{-ixt}\,dx$$

Por lo tanto, observando que $\lim_{A,B\to\infty}\left(f(B)e^{-iBt} - f(-A)e^{iAt}\right) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{(f')}(t) &= \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} f'(x)e^{-ixt}\,dx \\
&= \lim_{A,B\to\infty} \left[\left(f(B)e^{-iBt} - f(-A)e^{iAt}\right) + it\int_{-A}^{B} f(x)e^{-ixt}\,dx\right] \\
&= it\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx \\
&= it\widehat{f}(t).
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Hallar la transformada de Fourier de la siguiente función de $L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Usando la definición de la transformada de Fourier tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ixt}\,dx &= \lim_{M,N\to+\infty} \int_{-N}^{M} e^{-|x|}e^{-ixt}\,dx \\
&= \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} e^{-|x|}e^{-ixt}\,dx + \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{0} e^{-|x|}e^{-ixt}\,dx \\
&= \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} e^{-(1+it)x}\,dx + \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{0} e^{(1-it)x}\,dx \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left.\frac{e^{-(1+it)x}}{-(1+it)}\right|_{0}^{M} + \lim_{N\to+\infty} \left.\frac{e^{(1-it)x}}{(1-it)}\right|_{-N}^{0} \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1-e^{-(1+it)M}}{1+it}\right] + \lim_{N\to+\infty} \left[\frac{1-e^{-(1-it)N}}{1-it}\right] \\
&= \frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \\
&= \frac{2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

Observación: como sabemos de antemano que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx$ existe y es finita cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$, esta integral se puede calcular como el valor principal de Cauchy, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-M}^{M} f(x)e^{-ixt}\,dx.$$

Ejercicio 2. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de $L^1(\mathbb{R})$:

$$\text{(a)}\quad g(x) = e^{-x^2}, \qquad \text{(b)}\quad h(x) = \frac{1}{x^4+1}.$$

La idea ser encontrar un dominio donde valga el teorema de los residuos y tal que sobre una parte de su frontera obtengamos la integral que queremos calcular de manera tal que el resto sea relativamente fácil ver que sucede.

(a) Una manera de hallar $\widehat{g}$ es calcular explícitamente la integral

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ixt}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+ixt)}\,dx.$$

Como

$$x^2 + ixt = x^2 + 2ix\frac{t}{2} + \left(i\frac{t}{2}\right)^2 - \left(i\frac{t}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{it}{2}\right)^2 - \frac{t^2}{4}$$

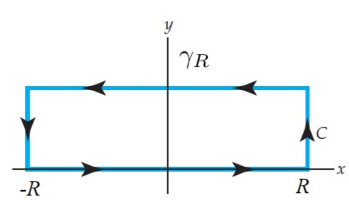
la integral anterior se puede reescribir de la forma

$$\widehat{f}(t) = e^{-t^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\frac{t}{2})^2}\,dx$$

y esta integral se calcula considerando la integral compleja

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\,dz$$

donde γ_R es el rectángulo mostrado en la figura (caso $t \geq 0$) y después hacer $R \to \infty$.



La resolución de esta integral se puede ver en el Ejercicio 4 del material complementario de la práctica 7.

Veamos otro método para hallar la transformada de Fourier de esta función.

Observamos que $g(x) = e^{-x^2}$ y $g'(x) = -2xe^{-x^2}$, por lo tanto g satisface la ecuación diferencial:

$$g'(x) + 2xg(x) = 0$$

Luego, transformando Fourier y usando las propiedades que vimos en el Ejercicio 1 nos queda que

$$it\widehat{g}(t) + 2i(\widehat{g}\,)'(t) = 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{(\widehat{g}\,)'(t)}{\widehat{g}(t)} = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln|\widehat{g}(t)| = -\frac{t^2}{4}$$

es decir,

$$\widehat{g}(t) = Ce^{-t^2/4}.$$

Para encontrar el valor de la constante C, evaluamos en $t = 0$:

$$C = \widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Finalmente,

$$\widehat{g}(t) = \sqrt{\pi}e^{-t^2/4}.$$

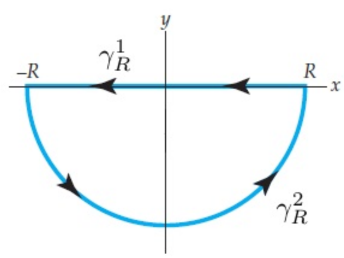
(b) Por definición

$$\widehat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} e^{-ixt}\, dx$$

Para calcular esta integral consideraremos por separado los casos $t \geq 0$ y $t \leq 0$. Veamos el caso $t \geq 0$. Para ello vamos resolver la integral compleja

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{-izt}}{z^4+1}\, dz$$

donde $\gamma_R = \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2$ es la curva mostrada en el siguiente gráfico.



Parametrizando ambas curvas tenemos que

$$\gamma_R^1(x) = x, \quad -R \leq x \leq R,$$

(Observar que γ_R^1 está orientada en sentido contrario al dibujo así que colocaremos un signo negativo delante de la integral)

$$\gamma_R^2(\theta) = Re^{i\theta}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi,$$

y luego

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{e^{-izt}}{z^4+1}\, dz &= \int_{\gamma_R^1} \frac{e^{-izt}}{z^4+1}\, dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{e^{-izt}}{z^4+1}\, dz \\ &= -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixt}}{x^4+1}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-iRe^{i\theta}t}}{(Re^{i\theta})^4+1} iRe^{i\theta}\, d\theta\end{aligned}$$

Para la segunda integral de la derecha tenemos que

$$\left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-iRe^{i\theta}t}}{(Re^{i\theta})^4+1} iRe^{i\theta}\, d\theta \right| \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{Re^{R\,\mathrm{sen}(\theta)t}}{|R^4e^{4i\theta}+1|}\, d\theta \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{R}{R^4-1}\, d\theta = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

con lo cual

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-iRe^{i\theta}t}}{(Re^{i\theta})^4+1}iRe^{-i\theta}\,d\theta=0$$

así que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{-izt}}{z^4+1}\,dz &= \lim_{R\to\infty}\left[-\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ixt}}{x^4+1}\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-iRe^{i\theta}t}}{(Re^{i\theta})^4+1}iRe^{i\theta}\,d\theta\right]\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}}{x^4+1}\,dx.\end{aligned}$$

Por otra parte, observemos que las singularidades de la función

$$\frac{e^{-izt}}{z^4+1}$$

son los puntos que satisfacen $z^4+1=0$, de decir,

$$z^4=-1 \quad\Rightarrow\quad z_k=e^{(\pi+2k\pi)i/4}, \quad k=0,1,2,3$$

son polos simples y únicamente $z_2=e^{5\pi i/4}$ y $z_3=e^{7\pi i/4}$ están dentro de la región acotada por γ_R. Por el Teorema de los residuos se tiene que

$$\int_{\gamma_R}\frac{e^{-izt}}{z^4+1}\,dz=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-izt}}{z^4+1},z_2\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-izx}}{z^4+1},z_3\right)\right],$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-izt}}{z^4+1},z_2\right)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{e^{-izt}}{z^4+1}=\lim_{z\to z_2}\frac{e^{-izt}-it(z-z_2)e^{-izt}}{4z^3}=\frac{e^{-iz_2t}}{4z_2^3}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-izt}}{z^4+1},z_3\right)=\lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{e^{-izt}}{z^4+1}=\lim_{z\to z_3}\frac{e^{-izt}-it(z-z_3)e^{-izt}}{4z^3}=\frac{e^{-iz_3t}}{4z_3^3}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R}\frac{e^{-izt}}{z^4+1}\,dz &= 2\pi i\left[\frac{e^{-iz_2t}}{4z_2^3}+\frac{e^{-iz_3t}}{4z_3^3}\right]\\ &= 2\pi i\left[-\frac{e^{(-1+i)t/\sqrt{2}}e^{-3\pi i/4}}{4}-\frac{e^{(-1-i)t/\sqrt{2}}e^{-\pi i/4}}{4}\right]\\ &= \frac{\pi i}{2}\left[-e^{(-1+i)t/\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-e^{(-1-i)t/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\\ &= \frac{\pi i e^{-t/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left[e^{it\sqrt{2}}+ie^{it/\sqrt{2}}-e^{-it/\sqrt{2}}+ie^{-it/\sqrt{2}}\right]\\ &= \frac{\pi i e^{-t/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left[2i\cos(t/\sqrt{2})+2i\operatorname{sen}(t/\sqrt{2})\right]\\ &= -\frac{\pi e^{-t/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\left[\cos(t/\sqrt{2})+\operatorname{sen}(t/\sqrt{2})\right]\end{aligned}$$

y al hacer $R \to \infty$

$$\widehat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi e^{-t/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \left[\cos(t/\sqrt{2}) + \operatorname{sen}(t/\sqrt{2})\right], \quad t \geq 0.$$

Recordemos que si una función de $L^1(\mathbb{R})$ es par, entonces su transformada de Fourier también es par.

En nuestro caso, $h(x) = \frac{1}{x^4+1}$ es par, por lo tanto $\widehat{h}$ también lo es. Usamos esta información y el hecho de que ya calculamos una expresión para $\widehat{h}(t)$ con $t \geq 0$, para encontrar $\widehat{h}(t)$ con $t \leq 0$. Tenemos entonces que si $t \leq 0$ entonces $-t \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \widehat{h}(t) = \widehat{h}(-t) &= \frac{\pi e^{-(-t)/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \left[\cos(-t/\sqrt{2}) + \operatorname{sen}(-t/\sqrt{2})\right] \\ &= \frac{\pi e^{t/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \left[\cos(t/\sqrt{2}) - \operatorname{sen}(t/\sqrt{2})\right], \quad t \leq 0. \end{aligned}$$