

COMPLEMENTO PRÁCTICA 4 - EJERCICIOS 8 A 12
SERIES DE FUNCIONES Y DE POTENCIAS

Ejercicio 1. Analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n n}{n+1} z^n.$$

La serie que nos interesa es una serie de potencias. Para entender su convergencia lo primero que tenemos que hacer es calcular su radio de convergencia. Recordemos el radio de convergencia de una serie de potencias está dado por el siguiente resultado:

Teorema. Dada una serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ con coeficientes en \mathbb{C} , definimos ρ como:

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Entonces la serie de potencias diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \rho^{-1}$ y converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < \rho^{-1}$. Más aún la serie de potencias converge uniformemente en todo disco de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, con $r < \rho$.

Calculando el valor de ρ para la serie de potencias del enunciado tenemos:

$$\begin{aligned} \rho &= \limsup \sqrt[n]{\left| \frac{(1+2i)^n n}{n+1} \right|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}^n n}{n+1}} \\ &= \limsup \sqrt{5} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Observemos que en este caso $\lim \sqrt[n]{|c_n|}$ existe y por lo tanto el límite superior coincide con este límite. El radio de convergencia en este caso es entonces $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Esto quiere decir que la serie converge absolutamente en el disco $D(0, \frac{1}{\sqrt{5}})$ y diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Además, la serie converge uniformemente en todo disco $D(0, r)$ con $r < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Veamos ahora que sucede para los complejos del borde, es decir si $|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. En este caso tenemos que la serie de los valores absolutos es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(1+2i)^n n}{n+1} z^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5}^n n}{n+1} \frac{1}{\sqrt{5}^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1},$$

por lo tanto la serie no converge absolutamente. Más aún también podemos afirmar que la serie de hecho diverge para todo punto del borde ya que si miramos el valor absoluto del término general tenemos que:

$$\lim |c_n z^n| = \lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

Es decir que el término general no tiende a cero por lo que la serie diverge en estos puntos. Resumiendo tenemos que la serie converge absolutamente si $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ y diverge si $|z| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. \square

Ejercicio 2. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z}{z+1} \right)^n.$$

Para estudiar la convergencia de esta serie vamos a hacer un cambio de variables que nos permita reducirla a una serie de potencias. Consideramos entonces $\omega = \frac{z}{z+1}$. Tenemos entonces que la serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z}{z+1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \omega^n$$

Para calcular el radio de convergencia de esta serie calculamos el límite:

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1,$$

por lo que el radio de convergencia es 1. Esto nos dice que la serie converge absolutamente si $|\omega| < 1$ y diverge si $|\omega| > 1$. Cuando $|\omega| = 1$ tenemos que la serie de los módulos es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \omega^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

y sabemos que esta serie es absolutamente convergente. **Es decir que la serie es absolutamente convergente si $|\omega| \leq 1$.**

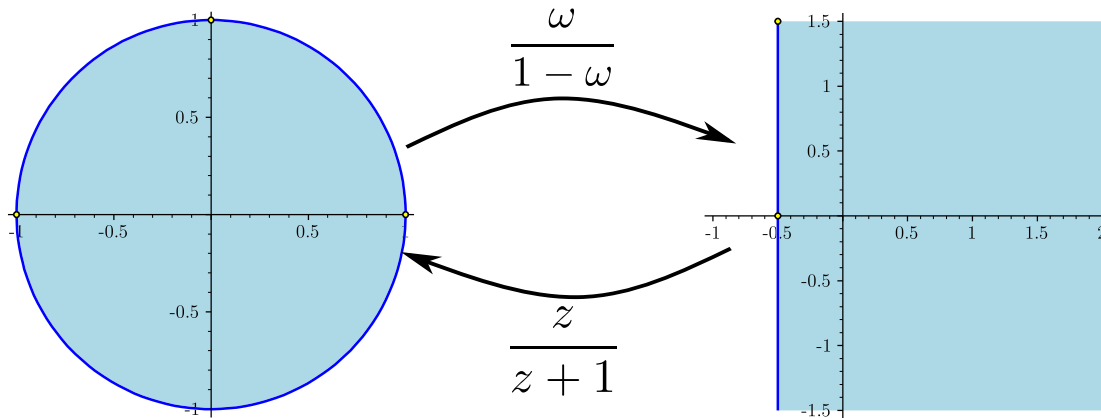
Ahora tenemos que encontrar que puntos z se corresponden con estos valores de ω . Es decir, que $z \in \mathbb{C}$ cumplen que $\frac{z}{z+1}$ pertenece al disco de centro 0 y radio 1. Como $\frac{z}{z+1}$ es una homografía, podemos encontrar su inversa y luego buscar la imagen de este disco por ella.

A esta homografía le podemos asignar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego a la homografía inversa le podemos asociar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos por lo tanto que $z = \frac{\omega}{1-\omega}$, y queremos entonces encontrar la imagen del disco $D(0, 1)$ por la homografía $h(\omega) = \frac{\omega}{1-\omega}$.

Recordemos que sabemos que cualquier homografía aplica circunferencias en rectas o circunferencias. Para saber cuál es la imagen de $D(0, 1)$ podemos entonces tomar tres puntos del borde, por ejemplo $1, i, -1$ y un punto interior, por ejemplo 0 , y calcular sus imágenes. En este caso tenemos:

$$h(1) = \infty, \quad h(i) = \frac{i}{1-i} = \frac{i-1}{2}, \quad h(-1) = \frac{-1}{2}, \quad h(0) = 0.$$

Como $h(1) = \infty$, h tiene que aplicar a la circunferencia en una recta. Por lo tanto la circunferencia se aplica en la recta que pasa por $\frac{i-1}{2}$ y $\frac{-1}{2}$, es decir la recta definida por $\operatorname{Re}(z) = \frac{-1}{2}$. El interior de la circunferencia debe ir entonces a uno de los dos semiplanos definidos por esta recta, estos son los definidos por $\operatorname{Re}(z) > \frac{-1}{2}$ y $\operatorname{Re}(z) < \frac{-1}{2}$. Para saber cuál de estos dos es basta ver a cual de ellos pertenece $h(0)$, que en este caso sería el primero de estos.



Esto quiere decir que $\left| \frac{z}{z+1} \right| \leq 1$ si y sólo si $\operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{2}$. Por lo tanto tenemos que la región de convergencia de la serie y la región de convergencia absoluta de la serie coinciden y son ambas $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{2}\}$. \square

Ejercicio 3. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} e^{inz}$$

Para analizar la convergencia de esta serie vamos a hacer el cambio de variable $\omega = e^{iz}$. Con este cambio de variable la serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} e^{inz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \omega^n,$$

y esta última es una serie de potencias en la variable ω , por lo que podemos usar los resultados que conocemos para estudiar su convergencia. Para su radio de convergencia tenemos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \omega^n$ converge absolutamente si $|\omega| < 1$ y diverge si $|\omega| > 1$. Veamos que sucede cuando $|\omega| = 1$.

Observemos que la serie no converge absolutamente en estos puntos, la serie de los módulos es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Esta serie podemos analizarla usando el resultado de comparación con límite. Comparándola con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Como este límite es finito y distinto de cero, y sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Podemos afirmar entonces que la serie no converge absolutamente cuando $|\omega| = 1$. Para analizar la convergencia condicional tenemos que usar el criterio de Dirichlet.

Tomamos entonces las sucesiones $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ de números reales y $z_n = \omega^n$ de números complejos. Para poder asegurar que la serie converge por el criterio de Dirichlet necesitamos verificar que a_n tiende decrecientemente a cero y que las sumas parciales $\sum_{n=1}^N z_n$ están uniformemente acotadas. Verifiquemos primero esto último. Las sumas parciales de z_n se pueden acotar de la

siguiente manera si suponemos que $\omega \neq 1$:

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N \omega^n \right| = \left| \frac{\omega - \omega^{N+1}}{1 - \omega} \right| \leq \left| \frac{\omega}{1 - \omega} \right| + \left| \frac{\omega^{N+1}}{1 - \omega} \right| = \frac{2}{|1 - \omega|}.$$

Como esta cota no depende de N la sucesión z_n satisface las hipótesis del criterio de Dirichlet. Observemos que cuando $\omega = 1$ la serie diverge, pues en estos casos queda la serie de los módulos que ya verificamos que diverge, y por lo tanto es necesario descartar estos casos para usar el criterio de Dirichlet.

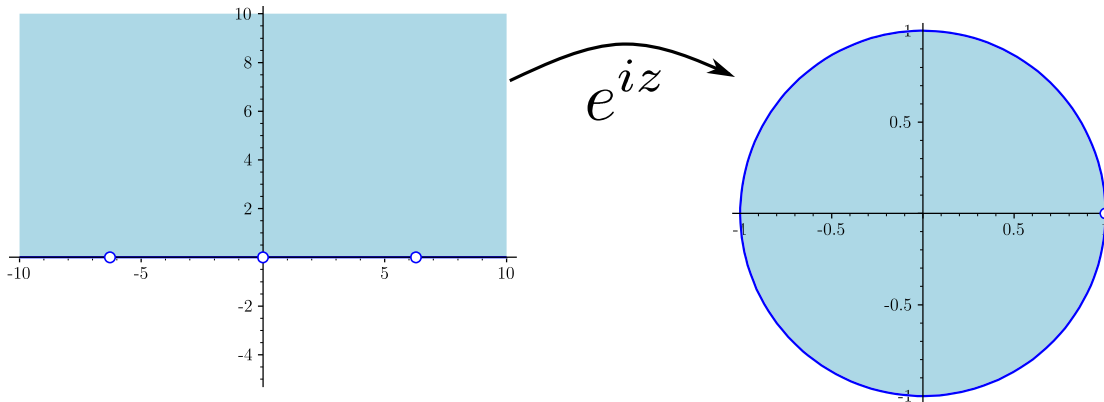
Veamos ahora que la sucesión a_n satisface las hipótesis necesarias. Primero observemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$, es decir que la sucesión efectivamente tiende a cero. Para ver que la sucesión es decreciente consideramos la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Como $a_n = f(n)$ alcanza con probar que $f(n)$ es decreciente, y esto lo podemos verificar viendo que su derivada es negativa:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Siempre que $x \geq 1$ esto es negativo y por lo tanto esta función es decreciente, que es lo que queríamos. Por lo tanto usando el criterio de Dirichlet podemos afirmar que la serie converge siempre que $|\omega| = 1$ y $\omega \neq 1$.

Resumiendo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \omega^n$ converge siempre que $|\omega| \leq 1$ y $\omega \neq 1$ y diverge siempre que $|\omega| > 1$ o si $\omega = 1$. Resta ahora entender que valores de z se corresponden con estos valores de ω . Lo que nos interesa es entonces saber cuando vale que $\omega = 1$ y cuando vale que $|\omega| \leq 1$. Como $\omega = e^{iz}$ tenemos que

$$|\omega| = |e^{iz}| = e^{\operatorname{Re}(iz)} = e^{-\operatorname{Im}(z)}.$$



Es decir que $|\omega| \leq 1$ si y sólo si $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Por otro lado sabemos que $e^{iz} = 1$ si y sólo si $iz = 2k\pi i$, es decir si $z = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Tenemos por lo tanto que la serie converge absolutamente en la región $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y la región de convergencia de la serie es $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. \square