

## Ecuaciones Diferenciales A/B – 2º cuatrimestre 2024

### PRÁCTICA 7: ESPACIOS DE SOBOLEV Y SOLUCIONES DÉBILES

**Ejercicio 1.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $|\alpha| \leq k$ . Demostrar las siguientes propiedades para  $u, v \in W^{k,p}(U)$ :

1.  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ .
2.  $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$  para todo  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $|\beta| \leq k - |\alpha|$ .
3.  $au + bv \in W^{k,p}(U)$  y  $D^\alpha (au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ .
4.  $u \in W^{k,p}(V)$  para todo  $V \subset U$  abierto.
5. Si  $f \in C_c^\infty(U)$ , entonces  $fu \in W^{k,p}(U)$  y  $D^\alpha (fu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} u$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $1 \leq p < \infty$ . Demostrar los siguientes resultados:

1. Si  $u \in W^{1,p}(I)$ , entonces existe  $\tilde{u} \in AC(I)$  tal que  $u = \tilde{u}$  en casi todo punto de  $I$  y la derivada débil de  $u$  coincide (como elemento de  $L^p(I)$ ) con la derivada de  $\tilde{u}$  en sentido clásico (que existe en casi todo punto de  $I$ ).
2. Si  $u \in W^{1,p}(I)$  y  $p > 1$ , entonces:

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \left( \int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \quad \forall x, y \in I.$$

**Ejercicio 3.** Probar que si  $u \in H^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\frac{1}{h}(u(\cdot + h) - u) \rightarrow u'$  en  $L^2(\mathbb{R})$  si  $h \rightarrow 0$ .

Sugerencia 1: Escribir  $\frac{1}{h}(u(\cdot + h) - u)$  como  $u' * \varphi_h$ , para alguna función  $\varphi_h$  adecuada.

Sugerencia 2: Probar primero  $\|u(\cdot + h) - u\|_2 \leq h\|u'\|_2$  (aquí puede ser útil la desigualdad de Jensen) y luego usarlo para probar la convergencia buscada. Puede ser de utilidad considerar  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$  convergente a  $u$  en  $H^1(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Probar los siguientes resultados:

1. La inyección canónica es continua de  $H^1(I)$  en  $L^\infty(I)$ , i.e.  $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ . Mostrar que este mismo resultado es falso si se reemplaza  $I$  por un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Todo conjunto acotado en  $H^1(I)$  es precompacto en  $C(\bar{I})$ , y por lo tanto en  $L^2(I)$ .

Sugerencia: Usar el teorema de Arzelà-Ascoli.

**Ejercicio 5.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado. Probar que si  $u \in H_0^1(I)$  entonces  $u \in L^\infty(I)$  y existe una constante  $C > 0$  independiente de  $u$  tal que  $\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2$ . Concluir que  $\|u'\|_2$  es una norma equivalente a  $\|u\|_{1,2}$  en  $H_0^1(I)$ .

**Ejercicio 6.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $k \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p < \infty$ . Para  $u \in W^{k,p}(U)$  y  $\varepsilon > 0$  definimos  $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$  en  $U_\varepsilon = \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$ , donde  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  es el núcleo regularizante estándar (ver Práctica 0). Demostrar que  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$  para todo  $\varepsilon > 0$  y que  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en  $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, acotado y con frontera de clase  $C^1$ . Probar que si  $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$  entonces existe una constante  $C > 0$  independiente de  $u$  tal que:

$$\int_U |\nabla u|^2 dx \leq C \left( \int_U |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_U |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que  $\|\Delta u\|_2$  es una norma equivalente a la usual en  $H_0^2(U)$ .

**Ejercicio 8.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $1 \leq p \leq \infty$ . Probar que si  $u \in W^{1,p}(U)$  es tal que  $\nabla u = 0$ , entonces  $u$  es constante en cada componente conexa de  $U$ .

**Ejercicio 9** (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, conexo y acotado frontera de clase  $C^1$ . Probar que existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$\|u - \bar{u}\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H^1(U),$$

donde  $\bar{u} = \int_U u \, dx$ .

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar la compacidad de la inclusión  $H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$ .

**Ejercicio 10** (Regla de la cadena). Sean  $1 < p < \infty$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con frontera de clase  $C^1$ . Demostrar que si  $F \in C^1(\mathbb{R})$  tiene derivada acotada y  $u \in W^{1,p}(U)$ , entonces  $F \circ u \in W^{1,p}(U)$  y  $\partial_i(F \circ u) = (F' \circ u)\partial_i u$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Ejercicio 11.** Considerar el siguiente problema para el operador *bilaplaciano*:

$$(1) \quad \Delta^2 u = f \quad \text{en } U, \quad u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en } \partial U,$$

donde  $f \in C(U)$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado con frontera de clase  $C^1$ . La notación  $\Delta^2$  significa  $\Delta(\Delta u)$ .

1. Demostrar que  $u \in C^4(U) \cap C^1(\bar{U})$  es solución de (1) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil para (1):

$$\text{Hallar } u \in H_0^2(U) \text{ tal que } \int_U \Delta u \Delta v \, dx = \int_U f v \, dx \text{ para toda } v \in H_0^2(U),$$

donde  $f \in L^2(U)$ .

2. Demostrar que (1) admite una única solución débil.

Sugerencia: Usar el Ejercicio 7 para probar que  $\|\Delta u\|_{L^2(U)}$  define una norma equivalente a la usual en  $H_0^2(U)$ .

**Ejercicio 12.** Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$(2) \quad -\Delta u + u = f \quad \text{en } U, \quad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en } \partial U,$$

donde  $f \in C(U)$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado con frontera de clase  $C^1$ .

1. Probar que  $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$  es solución de (2) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil de (2):

$$\text{Hallar } u \in H^1(U) \text{ tal que } \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U u v \, dx = \int_U f v \, dx \text{ para toda } v \in H^1(U),$$

donde  $f \in L^2(U)$ .

2. Demostrar que (2) admite una única solución débil.

**Ejercicio 13.** Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$(3) \quad -\Delta u = f \quad \text{en } U, \quad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en } \partial U,$$

donde  $f \in C(U)$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado con frontera de clase  $C^1$ .

1. Deducir la formulación débil para (3) sobre el espacio  $V = \{u \in H^1(U) : \int_U u \, dx = 0\}$  y mostrar que si existe una solución débil, entonces  $\int_U f \, dx = 0$ .
2. Demostrar que si  $f \in L^2(U)$  verifica  $\int_U f \, dx = 0$ , entonces existe una única solución débil de (2) en  $V$ . Más aún, dicha solución es única en  $H^1(U)$ , salvo constante.

**Ejercicio 14** (Principio débil del máximo). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con frontera de clase  $C^1$ , y sea  $\mathcal{L}$  el operador elíptico definido por:

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u),$$

donde  $a_{ij} \in L^\infty(U)$  para  $i, j = 1, \dots, n$  y existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y todo } x \in U.$$

Se dice que  $u \in H^1(U)$  verifica  $\mathcal{L}u \leq 0$  en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de  $\mathcal{L}u = 0$  si:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v \, dx \leq 0 \quad \forall v \in H_0^1(U), v \geq 0.$$

1. Verificar que  $u \in C^2(U)$  es subsolución débil de  $\mathcal{L}u = 0$  si y sólo si  $\mathcal{L}u \leq 0$ .
2. Probar que si  $u$  es subsolución débil de  $\mathcal{L}u = 0$  y  $u^+ \in H_0^1(U)$  (es decir  $u \leq 0$  en  $\partial U$ ), entonces  $u \leq 0$  en  $U$ .

Sugerencia: Usar que si  $u \in H^1(U)$  entonces  $u^+ \in H^1(U)$  y para  $i = 1, \dots, n$  se tiene

$$\partial_i u^+ = \begin{cases} \partial_i u & \text{en } \{x \in U/u(x) > 0\}, \\ 0 & \text{en } \{x \in U/u(x) \leq 0\}. \end{cases}$$