

Ecuaciones Diferenciales A/B – 2º cuatrimestre 2024

PRÁCTICA 6: ECUACIÓN DE ONDAS

Ejercicio 1.

1. Verificar que el cambio de variables:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct, \quad v(\xi, \eta) = u(x, t) \quad (c > 0),$$

transforma la ecuación de ondas $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ en $\partial_{\xi\eta}v = 0$.

2. Sean $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$. Usar el ítem 1. para deducir la fórmula de D'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x + ct) + g(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

para la solución del problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - c^2\partial_{xx}u(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \partial_t u(x, 0) &= h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sean $g \in C_c^2(\mathbb{R})$, $h \in C_c^1(\mathbb{R})$, y sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ la solución del problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \quad \partial_t u(x, 0) &= h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se definen la energía cinética k y la energía potencial p por:

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u(x, t))^2 dx, \quad p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x, t))^2 dx \quad t > 0.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. $k + p$ es constante.
2. $k(t) = p(t)$ para t suficientemente grande.
Sugerencia: Usar que u es de la forma $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$.

Ejercicio 3. Encontrar una fórmula explícita para la solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) &= 0 & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) &= 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \partial_t u(x, 0) &= h(x) & x > 0, \end{aligned}$$

suponiendo $g \in C^2([0, \infty))$, $h \in C^1([0, \infty))$ y $g''(0) = g(0) = h(0) = 0$.

Ejercicio 4. Repetir el Ejercicio 3 cambiando la condición de borde en $x = 0$ por $u(0, \cdot) = f$, suponiendo $g, f \in C^2([0, \infty))$, $h \in C^1([0, \infty))$ y:

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Verificar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas, aún sobre la característica $x = t$.

Ejercicio 5. Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Probar que la función u dada por la fórmula de Kirchhoff:

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS_y \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$

define una solución $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ del problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \partial_t u(x, 0) &= h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Sean $g \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$, y sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ la solución dada por la fórmula de Kirchhoff para el problema:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), \quad \partial_t u(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

Ejercicio 7. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (es decir, $u(x, t) = w(|x|, t)$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$, para alguna $w : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x, t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$