Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2024

Práctica 4: Transformada de Fourier

Definición: *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define por*

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi x\cdot y}\,dx, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Según sea conveniente, se usarán las notaciones $\mathcal{F}f$ o $\hat{f}$ para anotar a la transformada de Fourier de f.

Ejercicio 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:

1. *a)* Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha\cdot x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-\alpha)$.
   b) Si $g(x) = f(x-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i\alpha\cdot y}$.
   c) Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\hat{g}(y) = \lambda^n \hat{f}(\lambda y)$.
   d) Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ define una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \{1,\dots,n\}$, entonces $\hat{f}$ es derivable con respecto a y_k y $\partial_{y_k}\hat{f}(y) = \hat{g}(y)$.
2. Si f es radial entonces también lo es $\hat{f}$.
3. Si f tiene soporte compacto entonces $\hat{f}$ es infinitamente diferenciable.
4. La transformada de f está esencialmente acotada y $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Usar esto, junto con la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, para demostrar el lema de Riemann-Lebesgue: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{|y|\to\infty} \hat{f}(y) = 0$.
5. Si $n = 1$ y f sólo asume valores reales, entonces $\hat{f}$ es real si y sólo si f es par.

Ejercicio 2. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = e^{-a|x|} \quad (a>0), \qquad f_2(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0),$$

$$f_3(x) = \chi_{[a,b]}(x) \quad (a,b \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

En todos los casos, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.

1. Probar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Extender el resultado del ítem 1 para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y concluir que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces λ es una raíz cuarta de la unidad.

Ejercicio 4. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$. ¿Qué sucede si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Ejercicio 5.

1. Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' pertenecen al conjunto
$$L^1(\mathbb{R}) \cap \left\{ g \in C(\mathbb{R}) \colon \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0 \right\},$$
entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = \phi$.
2. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\hat{f}(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.
3. Probar que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito.

Ejercicio 6. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita del siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \qquad u = f \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{0\},$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Sugerencia: Transformar Fourier en la variable x y pensar en las funciones f_1 y f_4 del Ejercicio 2.

Ejercicio 7. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sugerencia: Al momento de antitransformar, (i) usar que $\frac{1}{a} = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$, $a > 0$, (ii) hacer aparecer la función $\int_0^{+\infty} e^{-t} K(x,t)\, dx$ donde K es el núcleo del calor.

Ejercicio 8. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita del siguiente problema para la ecuación de Schrödinger:

$$iu_t + \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \qquad u = g \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

donde $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Considerar la condición inicial en el sentido de L^2.

Ejercicio 9. Considerar el siguiente problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = f, \quad u_t = g & \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usar el método de la transformada de Fourier para deducir la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) - f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Ejercicio 10. Sea $f \in L^1(0,\infty)$. Se definen la *transformada-coseno* de Fourier y la *transformada-seno* de Fourier de f como:

$$\mathcal{F}_c f(y) = \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi xy)\, dx, \qquad \mathcal{F}_s f(y) = \int_0^\infty f(x) \sin(2\pi xy)\, dx \qquad y \in \mathbb{R},$$

respectivamente. Comprobar las siguientes propiedades:

1. Si se extiende f a $\mathbb{R}$ como una función par $\tilde{f}$, entonces $\mathcal{F}_c f = \frac{1}{2}\mathcal{F}\tilde{f}$.
2. Si se extiende f a $\mathbb{R}$ como una función impar $\tilde{f}$, entonces $\mathcal{F}_s f = -\frac{1}{2i}\mathcal{F}\tilde{f}$.

Buscar ejemplos de aplicación de estas transformadas a la resolución de ecuaciones diferenciales.