

# Ecuaciones Diferenciales A/B – 2º cuatrimestre 2024

## PRÁCTICA 1: SERIES DE FOURIER Y SEPARACIÓN DE VARIABLES

**Ejercicio 1.** Sean  $p \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible e integrable en  $[-p, p]$  tal que  $f(x + 2p) = f(x)$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ . Verificar los siguientes resultados:

- $\int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\int_{x-p}^{x+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Entonces  $g(x + 2p) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $\int_{-p}^p f(t) dt = 0$ .

**Ejercicio 2.** En cada caso, determinar la serie de Fourier de senos de  $f$  y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$
- $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi).$

**Ejercicio 3.** Sea  $f \in AC[-\ell, \ell]$  tal que  $f' \in L^2(-\ell, \ell)$  y  $f(-\ell) = f(\ell)$ . Demostrar que la serie de Fourier de  $f'$  se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de  $f$  y que los coeficientes de Fourier de  $f$  son sumables, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty,$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Ejercicio 4** (Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un rectángulo). Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & 0 < x < \ell, \quad 0 < y < m, \\ u(0, y) = 0, \quad u(\ell, y) = 0 & 0 \leq y \leq m, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, m) = 0 & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

- Hallar una solución formal mediante el método de separación de variables.
- Sea  $u$  la solución formal hallada en el ítem 1. Demostrar los siguientes resultados:
  - Si  $f \in L^1(0, \ell)$  entonces  $u \in C^2([0, \ell] \times (0, m])$  y  $u$  satisface la ecuación de Laplace en  $(0, \ell) \times (0, m)$ .
  - Si  $f \in L^2(0, \ell)$  entonces  $u(\cdot, y) \rightarrow f$  en  $L^2(0, \ell)$  si  $y \rightarrow 0$ . Cuando ocurre esto último se dice que  $u$  satisface la condición inicial  $u(\cdot, 0) = f$  en el sentido de  $L^2$ .
  - Si  $f \in AC(0, \ell)$  con  $f' \in L^2(0, \ell)$  y  $f(0) = f(\ell) = 0$  entonces  $u(\cdot, 0) = f$ .

Usando el principio de superposición, se puede ahora hallar una solución formal del problema con condiciones de borde  $u(0, y) = f_1(y)$ ,  $u(\ell, y) = f_2(y)$ ,  $u(x, 0) = f_3(x)$  y  $u(x, m) = f_4(x)$  y determinar condiciones sobre las funciones  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , para que la solución formal resuelva el problema.

**Ejercicio 5** (Problema de valores iniciales y de borde para la ecuación del calor unidimensional). Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(\ell, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) & & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

1. Hallar una solución formal mediante el método de separación de variables.
2. Dar condiciones sobre  $f$  para que la solución formal  $u$  hallada en el ítem 1 pertenezca a  $C^\infty([0, \ell] \times (0, \infty))$  y resuelva el problema cuando se considera la condición inicial en el sentido de  $L^2$ .
3. Dar condiciones sobre  $f$  para que la solución formal  $u$  hallada en el ítem 1 pertenezca a  $C^\infty([0, \ell] \times (0, \infty)) \cap C([0, \ell] \times [0, \infty))$  y resuelva el problema cuando se considera la condición inicial en sentido clásico.

**Ejercicio 6** (Problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos). Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + h(x) & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(\ell, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

1. Suponer  $h \equiv 0$  (vibración libre). Usar el método de separación de variables para hallar una solución formal y determinar condiciones sobre las funciones  $f$  y  $g$  para que dicha solución pertenezca a  $C^2(D) \cap C(\bar{D})$  y resuelva el problema, donde  $D = (0, \ell) \times (0, \infty)$ .
2. Suponer  $h \not\equiv 0$  (vibración forzada). Repetir el ítem anterior y determinar condiciones también para  $h$ .

Sugerencia: Buscar soluciones de la forma  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$ .

**Ejercicio 7.** Hallar una solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) + u_x(x, y) = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = \sin(y) & 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, \pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**Ejercicio 8** (Problemas de Dirichlet y de Neumann para la ecuación de Laplace en una bola de  $\mathbb{R}^2$ ). Sea  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .

1. (Operador Laplaciano en coordenadas polares). Sean  $u \in C^2(B)$  y  $U : (0, 1] \times [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$U(r, \theta) = u(x, y) \quad \text{donde} \quad x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta).$$

Demostrar que

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta}(r, \theta) + \frac{1}{r} U_r(r, \theta) + U_{rr}(r, \theta).$$

El lado derecho se conoce como *operador Laplaciano en coordenadas polares*.

2. (Problema de Dirichlet) Considerar el siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \quad u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B.$$

- a) Pasar a coordenadas polares, usar el método de separación de variables para hallar una solución formal y dar condiciones sobre  $f$  para que la solución hallada resuelva el problema.

Sugerencia: Buscar soluciones que sean acotadas en el origen.

- b) Verificar que la solución hallada en el ítem a) se escribe en coordenadas rectangulares como:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{y \in \partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2} f(y) dS \quad \forall x \in B, x \neq 0.$$

3. (Problema de Neumann) Repetir el ítem 2-a para el problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } B, \quad \partial_{\mathbf{n}} u = f \quad \text{sobre } \partial B,$$

donde  $\int_{\partial B} f dS = 0$ . Notar que ahora se obtiene una familia de soluciones, a diferencia de lo que sucede en el ítem 2-a. Probar, además, que este problema no tiene solución en  $C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$  si  $\int_{\partial B} f dS \neq 0$ .

**Ejercicio 9** (Ecuaciones del calor y de ondas en una bola de  $\mathbb{R}^2$ ). Sea  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .

1. (Ondas) Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{en } B \times (0, \infty),$$

suponiendo  $u = 0$  en  $\partial B \times (0, \infty)$ .

Sugerencia:

- a) Transformar el problema a coordenadas polares.  
 b) Buscar soluciones de la forma  $u(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta)T(t)$  y verificar que  $\varphi$  debe ser solución de la ecuación de Helmholtz  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Aquí  $\Delta$  indica el operador Laplaciano en coordenadas polares.  
 c) Buscar soluciones de la forma  $\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  para la ecuación de Helmholtz. Verificar que

$$\Theta(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta) \quad \text{donde } k \in \mathbb{N}_0 \quad (A_k, B_k \in \mathbb{R}),$$

y que  $R$  debe ser solución de

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - k^2)R = 0, \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

- d) Suponer  $\lambda > 0$  y verificar que haciendo la transformación  $z = \sqrt{\lambda}r$  la ecuación para  $R$  se reduce a la ecuación de Bessel de orden  $k$ :

$$z^2 \frac{d^2 R}{dz^2} + z \frac{dR}{dz} + (z^2 - k^2)R = 0.$$

- e) Tener en cuenta que la función de Bessel de primer tipo de orden  $k$ :

$$J_k(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+k},$$

resuelve la ecuación de Bessel de orden  $k$  y está acotada en  $z = 0$ .

2. (Calor) Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación del calor:

$$u_t - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{en } B \times (0, \infty),$$

suponiendo  $u = 0$  en  $\partial B \times (0, \infty)$ .

Sugerencia: Seguir pasos similares a los del ítem anterior.

**Ejercicio 10** (Problema de autovalores para el operador  $-\Delta$  en un cuadrado). Sea  $Q := (0, 1) \times (0, 1)$  el cuadrado unitario en  $\mathbb{R}^2$ . Verificar que las soluciones que se obtienen mediante el método de separación de variables para el problema de autovalores:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{en } Q, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial Q,$$

están dadas por:

$$u_{kj}(x, y) = \sin(\pi j x) \sin(\pi k y) \quad \text{donde } \lambda_{kj} := \pi^2(j^2 + k^2), \quad j, k \in \mathbb{N}.$$