Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2024

Práctica 0: Resultados preliminares

Antes de empezar, se sugiere revisar los siguientes resultados:

- Teoremas de la convergencia dominada y de la convergencia monótona. Lema de Fatou.
- Teorema de la divergencia de Gauss.
- Teoremas de la función implícita y de la función inversa.
- Teorema de Ascoli-Arzelà.
- Teorema de la partición de la unidad.

Ejercicio 1 (Diferenciación bajo el signo integral)**.** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f\colon U \times V \to \mathbb{R}$ medible, $x_0 \in U$ y $j \in \{1, \dots, n\}$.

1. Demostrar que si existe $\varepsilon > 0$ tal que:
   - $f(x, \cdot) \in L^1(V)$ para todo $x \in B_\varepsilon(x_0)$,
   - $f(\cdot, y)$ es derivable con respecto a x_j en $B_\varepsilon(x_0)$ para casi todo $y \in V$,
   - existe $g \in L^1(V)$ tal que $|\partial_{x_j} f(x, y)| \le g(y)$ para todo $x \in B_\varepsilon(x_0)$ y para casi todo $y \in V$,

   entonces la función $F(x) = \int_V f(x, y)\, dy$ es derivable con respecto a x_j en $B_\varepsilon(x_0)$ y la derivada está dada por:
   $$\partial_j F(x) = \int_V \partial_{x_j} f(x, y)\, dy.$$
2. Verificar que si f y $\partial_{x_j} f$ son continuas en $U \times \overline{V}$, con V acotado, entonces f satisface las condiciones del ítem anterior para cualquier $x_0 \in U$.

Ejercicio 2. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables.

1. Sean $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $F(x) = \displaystyle\int_{f(x)}^{g(x)} h(s)\, ds$, $x \in \mathbb{R}$. Verificar que:
   $$F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x).$$
2. Sea $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con $\partial_1 h$ continua y acotada, y sea $G(x) = \displaystyle\int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s)\, ds$, $x \in \mathbb{R}$. Verificar que:
   $$G'(x) = h(x, g(x))g'(x) - h(x, f(x))f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \partial_x h(x, s)\, ds.$$

Ejercicio 3. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ medibles. Demostrar los siguientes resultados:

1. (Desigualdad de Hölder) Si $1 \le p \le \infty$ entonces:
   $$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'},$$
   donde p' es el *exponente conjugado* de p, definido por:
   $$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si} \quad 1 < p < \infty, \\ \infty & \text{si} \quad p = 1, \\ 1 & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$
   Notar que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
2. (Desigualdad de Minkowsky) Si $1 \le p \le \infty$ entonces:
   $$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. (Desigualdad integral de Minkowsky) Si $1 \leq p < \infty$ entonces:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\, dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |F(x,y)|^p \, dy \right)^{1/p} dx.$$

Ejercicio 4. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathbb{R}^n$. Se define $\tau_{-h} f(x) = f(x+h)$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Considerar $1 \leq p < \infty$ y probar que $\|\tau_{-h} f - f\|_p \to 0$ si $h \to 0$.
   Sugerencia: Considerar primero $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y luego extender el resultado por densidad.
2. Mostrar que el ítem anterior no vale para $p = \infty$.

Ejercicio 5. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El producto de convolución $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy,$$

siempre que el lado derecho sea finito. Demostrar los siguientes resultados:

1. (Desigualdad de Young) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y:
$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$
2. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$ y p' es el exponente conjugado de p, entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y:
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$
   Además, $f * g$ es uniformemente continua.
3. Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, donde $k \in \mathbb{N}$, y $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y:
$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g,$$
   para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ de longitud $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k$.

Ejercicio 6 (Núcleo regularizante estándar)**.**

1. Sea $\rho \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$\rho(x) = \begin{cases} c\, e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$
   donde $c = c(n) > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$. Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\rho_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$
   Probar que $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{sop}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$. Notar que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.
   La familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ se conoce como *núcleo regularizante estándar*.

Ejercicio 7 (Regularización por convolución)**.** Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa tal que $\|\rho\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ se define $\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por:

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Demostrar los siguientes resultados:

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p < \infty$, entonces $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es uniformemente continua en el abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ entonces
$$\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0,$$
para todo $V' \subset\subset V$.
La notación $V' \subset\subset V$ significa que V' es un abierto tal que $\bar{V}' \subset V$.
3. Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$ entonces $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.
4. Si $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
5. Calcular $f * \rho_\varepsilon$, donde $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ y $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ el núcleo regularizante estándar.
La notación $\mathbb{1}_A$ indica la función característica del conjunto A.

Ejercicio 8. Considerar $1 \leq p < \infty$ y demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 9.
1. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Probar que si $\int_U f\varphi\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$ entonces $f = 0$ en casi todo punto.
2. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Probar que si $\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ entonces f es constante en casi todo punto.

Ejercicio 10. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1. Usar el teorema de la divergencia de Gauss para demostrar las siguientes identidades:
1. (Primera fórmula de Green) Si $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ y $v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$ entonces:
$$\int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial U} v\partial_{\mathbf{n}} u\, dS.$$
2. (Segunda fórmula de Green) Si $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ entonces:
$$\int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}} v)\, dS.$$
3. (Fórmula de integración por partes) Si $u, v \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$ entonces:
$$\int_U u\partial_i v\, dx = -\int_U \partial_i u\, v\, dx + \int_{\partial U} uv\mathbf{n}_i\, dS.$$

La notación $\partial_{\mathbf{n}} u$ indica la derivada normal de u en la dirección del vector $\mathbf{n}$ normal unitario exterior a ∂U, $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. La notación Δu indica el Laplaciano de u, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u$.