

## PRÁCTICA 6: DIFERENCIACIÓN

**Definiciones y notación:** durante esta práctica se utilizarán las siguientes definiciones:

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  denotará el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto de  $\mathbb{R}^n$ .
- Para  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $M(f)$  denotará la función maximal de Hardy-Littlewood centrada, definida por

$$M(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| : Q \text{ un cubo centrado en } x \right\}.$$

**Ejercicio 1.** Probar que,

- (a) Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .
- (b) Si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $M(f)$  es semicontinua inferiormente.

**Ejercicio 2.**

- (a) Definimos, para  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$M^*(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| : Q \text{ cubo que contiene a } x \right\}.$$

Probar que existen constantes  $A, B > 0$  que dependen sólo de  $n$ , tales que

$$AM(f)(x) \leq M^*(f)(x) \leq BM(f)(x), \text{ para toda } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

- (b) Probar que lo mismo vale para

$$\widetilde{M}(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f| : B \text{ una bola que contiene a } x \right\}.$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  que satisface  $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| > 0$ . Probar que existe  $c > 0$  tal que  $M(f)(x) \geq c\|x\|^{-n}$  para  $\|x\| \geq 1$ . Deducir que  $M(f) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ , salvo que  $f = 0$  en casi todo punto.

**Ejercicio 4.** Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

- (a) Probar que si  $1 \leq p < \infty$ , existe  $c > 0$  que no depende de  $f$  tal que para todo  $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x: |f(x)| \geq \alpha/2\}} |f(x)| dx.$$

- (b) Probar que si  $1 < p \leq \infty$ , entonces  $M(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Además existe  $c_p > 0$  que no depende de  $f$  tal que  $\|M(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos medibles. Decimos que  $\mathcal{S}$  se contrae regularmente a  $x$  si verifica

- (i) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $S_i \in \mathcal{S}$  con  $\text{diam } S_i < \varepsilon$ .
- (ii) Existe una constante  $k > 0$  tal que para todo  $S_i \in \mathcal{S}$ , si  $Q_i$  es el cubo más pequeño con centro en  $x$  que contiene a  $S_i$ , entonces  $|Q_i| \leq k|S_i|$ .

Notar que los conjuntos  $S_i$  no necesitan contener a  $x$ .

- (a) Probar que  $\{B(x, r)\}_{r>0}$  se contrae regularmente a  $x$
- (b) Probar que si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , entonces en todo punto de Lebesgue de  $f$

$$\frac{1}{|S|} \int_S |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0$$

para toda familia  $\mathcal{S}$  que se contrae regularmente a  $x$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  medible y acotada tal que  $\text{sop}(\phi) \subseteq \{x : \|x\| \leq 1\}$  y  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , sea  $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$ . Probar que para toda  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x),$$

si  $x$  es un punto de Lebesgue de  $f$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = 0$ , para toda  $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . Probar que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f \equiv c$  a.e.

**Ejercicio 8.** Sea  $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible, acotada y de soporte compacto. Probar que existe una constante  $C > 0$  tal que para toda función  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  vale:

$$\sup_{\varepsilon > 0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq CM(f)(x),$$

donde  $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(x/\varepsilon)$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin(1/x), & x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini  $f$  en  $x_0 = 0$ .

**Ejercicio 10.** Hallar  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  creciente, continua y tal que,

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

**Ejercicio 11.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente creciente y absolutamente continua con  $g(a) = c$  y  $g(b) = d$ . Probar que,

- (a) Si  $G \subseteq [c, d]$  es abierto, entonces  $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$ .
- (b) Sea  $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$ . Si  $E \subseteq [c, d]$  y  $|E| = 0$  entonces  $g^{-1}(E) \cap H$  tiene medida nula.

(c) Si  $E \subseteq [c, d]$  es medible, entonces  $F = g^{-1}(E) \cap H$  es medible y  $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx$ .

(d) Si  $f$  es medible y no negativa sobre  $[c, d]$ , entonces  $(f \circ g)g'$  es medible sobre  $[a, b]$  y  $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ .

**Ejercicio 12.** Sean  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , absolutamente continua en  $[a, b]$ ,  $g$  integrable sobre  $[a, b]$  y

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$

**Ejercicio 13.** Probar que si  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$ , entonces  $f$  se puede escribir como  $f = g + h$  donde  $g$  es absolutamente continua en  $[a, b]$  y  $h$  es singular en  $[a, b]$ . Probar, además, que  $g$  y  $h$  son únicas salvo constantes aditivas.

**Ejercicio 14.** Sean  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) funciones monótonas crecientes tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge a un límite finito para todo  $x \in [a, b]$ . Sea  $f(x)$  el límite. Probar que  $f$  es derivable a.e. y  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  a.e.

**Ejercicio 15.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de variación acotada. Sea  $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $V(x) := V_a^x(f)$ . El objetivo de este ejercicio es probar que  $V' = |f'|$  a.e. Para eso se propone el siguiente plan.

(a) Dada una partición  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , existe una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

- $g(a) = 0$ ,
- para cada  $0 \leq j \leq n-1$ :  $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$ ,
- para cada  $0 \leq j \leq n-1$ : existe una constante  $c_j \in \mathbb{R}$  tal que

$$g|_{[x_j, x_{j+1}]} = f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j \text{ ó } g|_{[x_j, x_{j+1}]} = -f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j.$$

(b) Probar que toda función  $g$  como en (a) verifica que

- $|g'| = |f'|$  a.e.,
- $g(b) = \sum_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$ ,
- $V - g$  es monótona creciente.

(c) Elegir una sucesión de funciones  $g_k$  como en (a) tales que  $\sum_k V(x) - g_k(x) < \infty$  para casi todo  $x$  y aplicar el ejercicio anterior.

**Ejercicio 16.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de variación acotada. Sea  $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $V(x) := V_a^x(f)$ . Probar que,

(a)  $f$  es continua si y sólo si  $V$  lo es.

(b)  $f$  es absolutamente continua si y sólo si  $V$  lo es. Además en este caso,

$$V(x) = \int_a^x |f'(y)| dy, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

(c)  $\int_a^b |f'| \leq V_a^b(f)$  y la igualdad vale si y sólo si  $f$  es absolutamente continua.

**Ejercicio 17.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente continua. Probar que si  $N \subseteq [a, b]$  tiene medida nula, entonces  $f(N)$  tiene medida nula. Concluir que la imagen por  $f$  de un conjunto medible es un conjunto medible.

(Pista: la imagen por  $f$  de un intervalo  $[c, d]$  es un intervalo de medida menor a la variación de  $f$  en  $[c, d]$ ).