Práctica 4: Teoremas de Fubini y Cambio de variables

Ejercicio 1.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

(b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

Ejercicio 2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible.
Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible y sea $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que si h es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

Ejercicio 4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que $|E_x|_e = |I - E_y|_e = 0$ para todo $(x, y) \in I \times I$. Probar que E no es medible.

Ejercicio 5. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y no negativa. Definimos

$$R(f, E) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}.$$

Probar que

(a) Si f es una función simple entonces $R(f, E)$ es medible.

(b) Si $f_k : E \to \mathbb{R}$ es una sucesión creciente de funciones medibles y no negativas que convergen a f entonces $\lim\limits_{k\to\infty} R(f_k, E) = R(f, E)$. Concluir que $R(f, E)$ es medible.

(c) Se verifica la igualdad $\int\limits_E f(x)\mathrm{d}x = |R(f, E)|$.

Ejercicio 6. Sea f una función medible no negativa definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función ω se llama *distribución de f sobre E*. Probar que

(a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.

(b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

(c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.

(d) Si ω es continua en α entonces $|\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.

(e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$.

(f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$.

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

Ejercicio 7. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$ para todo $t \geq 0$. Consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Probar que

(a) G es medible

(b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$

Ejercicio 8. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $k(x, y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x.y)$ es medible.

Ejercicio 9. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A-x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A||B|$.

Ejercicio 10. Sean f y g funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$

(a) Probar que la función $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ es medible sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

(b) Se define la convolución de f y g por medio de la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy,$$

en cada x donde la integral exista.

Si f y g son integrables sobre $\mathbb{R}^n$, probar que $f * g$ existe en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$, es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y se satisface

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Ejercicio 11. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$ es medible e integrable.

Se define la *Transformada de Fourier de f* como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Probar que

(i) $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

(ii) $\hat{f}(\xi) \underset{\|\xi\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, (*Lema de Riemann-Lebesgue*).

Sug.: Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{Q_k}$ simple, con Q_k cubos, tal que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$.

(iii) Si $f(x) = f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$, donde cada $f_k(x_k) \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1)\dots\hat{f}_n(\xi_n)$.

(iv) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable y tal que $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a, b]$. Se define

$$g(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Ejercicio 13. Sean $F \subseteq [a, b]$ un compacto ($a, b \in \mathbb{R}$) y $\lambda > 0$. Notamos con $d(x, F)$ la distancia a F de un punto $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in [a, b]$, sea

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y, F)^\lambda}{|x - y|^{1+\lambda}} dy.$$

Probar que M_λ es medible e integrable sobre F. Probar además la estimación

$$\int_F M_\lambda(x)dx \leq \frac{2}{\lambda} |[a, b] \setminus F| .$$

Ejercicio 14. Probar que:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{sen(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 15.

(a) Probar que para cualquier función medible no negativa $f(x, y)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$ se cumple

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \int\limits_G f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

(b) Probar que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $Q :: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y solo si todos los autovalores de A son positivos.

Probar, además, que en tal caso

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 17. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función radial si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante C_n tal que para toda función radial f vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = C_n \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(r)dr.$$

Ejercicio 18. ¿Para qué valores de p es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria $\{\|x\| \leq 1\}$?

Ejercicio 19. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}})} dx.$$

Ejercicio 20. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1} |\log(x)|^{q-1} dx,$$

es finita si $p > 0$ y $q > 0$ y expresar su valor en términos de la función Γ.
Sug.: Considere el cambio de variables $x = e^{-t}$.