Práctica 3: Integral de Lebesgue

Ejercicio 1. Sea f definida sobre $\mathbb{R}^n$, medible y no negativa. Probar que si E es medible entonces
$$\int_E f = \sup\left\{\int_E \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple}\right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

(a) Probar que si $f \geq 0$ entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$
Concluir que
$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx$$

(b) Si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale
$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{a}\right)\ dx \quad = \quad a^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Ejercicio 4. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $\left|\int_E f dx\right| = \int_E |f|dx$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E.

Ejercicio 5. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $\int_A f dx = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$. Probar que $f = 0$ a.e. en E.

Ejercicio 6. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea f integrable sobre E. Probar que si $\int_E |f_k - f|dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$, entonces $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existen g continua e integrable sobre $[0, +\infty)$, y una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

Ejercicio 8. Sea f integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y $Q_k = [-k,k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Ejercicio 9.

(a) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ conjuntos medibles contenidos en el intervalo $[0,1]$. Si para cada $x \in [0,1]$, el conjunto $A_x = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ y } x \in E_k\}$ tiene por lo menos q elementos, probar que existe k tal que $1 \leq k \leq n$ y $|E_k| \geq \frac{q}{n}$.

(b) Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^m$ y $k \in \mathbb{N}$. Probar que si $G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$, entonces G es medible y $k|G| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.

Ejercicio 10.

(a) Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

(b) Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

Ejercicio 11. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre E. Si $\lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Ejercicio 12.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E)$. Mostrar que

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 13. Si $f \in L^1(0,1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0,1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ejercicio 14. Mostrar que el Teorema de Convergencia Mayorada es válido para funciones a valores complejos.

Ejercicio 15. Usar el Teorema de Egorov para probar el Teorema de Convergencia Mayorada.

Ejercicio 16. Probar que para cada $g \in L^1([0,\infty))$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$

Ejercicio 17. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^m$ y g integrable sobre $\mathbb{R}^m$ tales que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea f una función tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a.e. Probar que para todo $a > 0$, si llamamos $E_k = \bigcup_{n\geq k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$. Deducir que $f_n \overset{m}{\to} f$.

Ejercicio 18. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0,1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0,1)$, existe $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0,1)$.
(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x)|\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n+1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n-1/3)\pi]^{-1/2}, n \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 19. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < \infty,$$

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dx.$$

Ejercicio 20. Sean $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

Ejercicio 21. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^m$ medible y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E, entonces $\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$.

(b) Probar que si E es de medida finita y $\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$ entonces f es integrable sobre E.

Ejercicio 22. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ e integrable sobre $[0,1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0,1]$ medible.

Ejercicio 23. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Ejercicio 24. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

1. para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función de (x,y) acotada.

Probar que

(a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy$.