Práctica 1: Medida de Lebesgue

Ejercicio 1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que existe $H \supseteq A$ de tipo G_δ tal que $|A|_e = |H|$.

Ejercicio 2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

Ejercicio 3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|A| = 0$, y sea $E \subseteq A$.

(a) Probar que E es medible y que $|E| = 0$.

(b) Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c. ¿Cuál es el cardinal de los no medibles?

Ejercicio 4. Sea $E = \{x \in (0,1)/$ en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito $7\}$. Probar que E tiene medida 0.

Ejercicio 5.

(a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida cero.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.

(c) ¿Y si f tiene finitas discontinuidades?

Ejercicio 6. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 8. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(x) = x + v$. Probar que

(a) $|T(E)|_e = |E|_e,\ E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

Ejercicio 9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r.a : a \in A\}$. Probar que

(a) $|rA|_e = r^n |A|_e$.

(b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^n |A|$.

Ejercicio 10. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

(a) Suponiendo conocida $|B(0,1)|$, calcular $|B(0,r)|$.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0,r)|$ es continua.

(c) Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.

(d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de A, $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$, tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 11. Sea $T : [0,1) \to [0,1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Probar que si $E \subseteq [0,1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $|T^{-1}(E)| = |E|$.

Ejercicio 12. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n\geq 1}$ definimos

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ son medibles.

(b) $|\liminf\limits_{n\to\infty} A_n| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |A_n|$.

(c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $|\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$ entonces $|\limsup\limits_{n\to\infty} A_n| \geq \limsup\limits_{n\to\infty} |A_n|$.

(d) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, entonces $|\limsup\limits_{n\to\infty} A_n| = 0$.

Ejercicio 13. Construir un subconjunto de $[0,1]$ como el conjunto de Cantor excepto que en el k-ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$, $0 < \delta < 1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

Ejercicio 14. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) E es medible.

(b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \backslash F|_e < \epsilon$.

(c) Existen H de clase F_σ y N de medida 0 tales que $E = H \cup N$.

Ejercicio 15. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0,1]$ de clase F_σ y de medida uno formado sólo por números irracionales.

Ejercicio 16. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$(C) \qquad |A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

(a) Todo conjunto medible satisface (C).

(b) Si E es acotado y satisface (C) entonces E es medible.

(c) E es medible si y sólo si satisface (C).

Ejercicio 17.

(a) Probar que si $(E_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\left|\bigcup_{k\geq 1} E_k\right|_e = \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente $(E_k)_{k\geq 1}$ de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $|E_k|_e < \infty$ para todo k y

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e < \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

Ejercicio 18. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

(a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|I| < \alpha|E \cap I|$.

(b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.

(c) Concluir que el conjunto de las diferencias de E definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

Ejercicio 19. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal c.

Ejercicio 20. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible que cumple la siguiente propiedad: si $x,\ y \in E$, con $x \neq y$, entonces $\frac{x+y}{2} \notin E$. Probar que E tiene medida cero.

Sugerencia: Mostrar primero que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que para todo intervalo I se tiene que $|E \cap I| \leq \alpha|I|$.

Ejercicio 21. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F,\ F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

(a) $|E|_i \leq |E|_e$.

(b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.

(c) Si $|E|_e < \infty$ y $|E|_i = |E|_e$, entonces E es medible.

(d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.

(e) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.

(f) Si $(E_j)_{j\geq 1}$ son disjuntos entonces $\left|\bigcup_{j\geq 1} E_j\right|_i \geq \sum_{j\geq 1} |E_j|_i$.

Ejercicio 22. Sea V un conjunto de Vitali. Probar que si E es medible y $E \subseteq V$ entonces $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

Ejercicio 23.

(a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que $\left|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right|_e < \sum_{k\in\mathbb{N}} |E_k|_e$.

(b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_j)_{j\geq 1}$ tal que $\left|\bigcup_{j\geq 1} E_j\right|_i > \sum_{j\geq 1} |E_j|_i$.

(c) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < \infty$ y $|E|_e = \infty$.

Ejercicio 24. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $A \subseteq E$. Probar que

$$|E| = |A|_i + |E \backslash A|_e.$$