Práctica 7

1. Sea A un conjunto, y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $f : A \to Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1} \subseteq A$ tales que

$$d\left(f_{n_k}(a_k), f(a_k)\right) \geq \alpha \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

(c) $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$.

(d) $f_n : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ f_n(\varphi) = \frac{n}{n+1}\,\varphi$.

Aquí en $C([0, 1])$ consideramos la distancia d_∞.

3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$.

ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$.

iii. $f_n(x) = n^2x\,(1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$.

iv. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $A = \mathbb{R}$.

(b) Para la sucesión de **i.**, probar que la convergencia es uniforme sobre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, y para la de **ii.**, que es uniforme sobre $[2, 5]$.

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$, mostrar que $f \in B(X)$. ¿Sigue valiendo esto si la convergencia es apenas puntual?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada*, o es *acotada* en $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$.

5. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}.$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f'_n)_{n\geq 1}$.

6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} : X \to \mathbb{R}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que:

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

7. Sean X, Y espacios métricos, y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to Y$. Probar que f es uniformemente continua.

8. Sea $(f_n)_{n\geq 1} : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X. Probar que:

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

10. Sea $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Probar que las dos series de funciones

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)$$

convergen absoluta y uniformente en $\mathbb{R}$ a funciones continuas.

11. Consideremos, por definición, que $y(x) = \sin(x)$ es la única función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable que satisface $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Probar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sin(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

y que la serie converge absoluta y uniformente en todo conjunto acotado.

¿Es uniforme la convergencia en $\mathbb{R}$? *Sugerencia: usar que* $\sin(x)$ *es una función acotada.*

12. Probar que la serie

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$

define una función continua en $(0, +\infty)$.

Probar que además f es derivable, y calcular su derivada.

13. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión del Ejercicio 3(a)iv. Probar que la serie de término general f_n converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma de $[a, +\infty)$ con $a > 0$, pero no en $(0, +\infty)$.