Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}x^2 + (x-1)^2 y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$, la función identidad.

(d) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

Aquí d_2 es la métrica euclídea usual, y δ es la métrica discreta.

¿Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos d_1 o d_∞?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Dado $x \in \mathbb{Q}$, denotamos $\operatorname{den}(x) = n$ si $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ coprimos.

Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{den}(x)}, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua en $x \in (0, 1)$ si y solo si x es irracional.

Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} : \operatorname{den}(x) \leq n\}$ es finito.

4. Sea E un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

5. Sean E y E' espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

6. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

(a) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\big\}$ es cerrado.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

¿Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos las métricas d_1 o d_∞?

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

8. Sean E y E' espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Concluir que la función $\mathcal{R} : C([0, 1]) \to \{f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \to \mathbb{R}\}$ dada por $\mathcal{R}(f) = f|_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ es inyectiva.

9. Sean E y E' espacios métricos y $f : E \to E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E'.

10. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

11. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.

(b) Usando esto rehacer los items (b), (d) y (g) del Ejercicio 5 de la Práctica 3.

12. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.

i. Probar que g es continua.

ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

(b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \to [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0\ \forall x \in A$ y $h(x) = 1\ \forall x \in B$.

(c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Nota: está última afirmación está comprendida en el llamado *Lema de Urysohn*.

13. Probar que las funciones f y g de los ejercicios 11 y 12 son de tipo Lipschitz. Deducir que son uniformemente continuas.

14. (a) Verificar que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, +\infty)$. ¿Y en $[\varepsilon, +\infty)$ para $\varepsilon > 0$?

(b) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

15. Sean E, E' espacios métricos y sea $f : E \to E'$ una función uniformemente continua. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'.

16. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

17. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.
