Práctica 2

Recordar: Dadas $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y dados $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$, se tiene que:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva vale la igualdad.

(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Si f es sobreyectiva vale la igualdad.

(g) $X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$.

(h) Si f y g son inyectivas (respectivamente: sobreyectivas, biyectivas), entonces $g \circ f$ es inyectiva (respectivamente: sobreyectiva, biyectiva).

---

1. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\,\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$

2. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

3. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

4. Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.

5. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:
- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que para toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

6. (a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto (esto es, un conjunto de símbolos) finito, hay más números reales que palabras (esto es, sucesiones finitas de símbolos) definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

7. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

8. Sea A un conjunto.

(a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

(b) Concluir que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

9. Sean A, B, C y D conjuntos. Probar que:

(a) $A \sim B$ y $C \sim D \Longrightarrow A \times C \sim B \times D$

(b) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

10. (a) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Sugerencia: considerar el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! dicho desarrollo no es único.

(b) Concluir que $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$.

11. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

12. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.

(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

13. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

14. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Calcular el cardinal de $[0,1) \times [0,1)$.

(c) Calcular el cardinal de $\mathbb{R}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

15. Calcular el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

16. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

(b) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.

17. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i \in I}$ indexada por I tal que

- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Probar que I es contable.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.
