1	2	3	4	Calif.

NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

Análisis Avanzado
Segundo parcial - 30 de noviembre de 2024

Nota: se aprueba con dos de los primeros cuatro ejercicios bien y completos. El 5 es optativo y **de ningún modo** influirá en la calificación. Además, recordar que la encuesta de finalización de cuatrimestre es obligatoria y **quienes no la completen reprobarán la materia**. Buena suerte, justifique **todas** sus respuestas y escriba con claridad.

1. Sean E un espacio métrico y $f : E \to E$ una función. Probar que si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.[1]

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

2. Probar que la función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

está bien definida, es dos veces derivable y $c'' + c = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Probar que $f(A)$ es medible y que $\mu(f(A)) = 0$ para todo A nulo.

4. Sean $f : E_1 \to \mathbb{R}$ una función y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos medibles. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f restringida a E_{n_0} resulta integrable. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n} f\, d\mu.$$

5. (**Optativo:** Teorema de existencia de Picard.) Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función Lipschitz continua. Entonces, dado $y_0 \in \mathbb{R}^d$, existe $\varepsilon > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(0) = y_0$$

tiene solución en el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Sugerencia: definir $X = C([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^d)$ con ε adecuado tal que $\phi : X \to X$ dada por

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, d\mu(s)$$

sea una contracción.

Alicia Dickenstein (1955 en Buenos Aires) es una matemática argentina conocida por su trabajo en geometría algebraica, particularmente geometría tropical y sus aplicaciones a los sistemas biológicos. Es profesora de la UBA, miembro de la Sociedad Estadounidense de Matemática, fue viceprisidenta de la Unión Matemática Internacional (2015 - 2018) y ganadora del premio L'Oréal-Unesco a Mujeres en Ciencia (2021).

[1] Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces).

Resoluciones

1. Primero notemos que si f^n es una contracción entonces existe un único x tal que $f^n(x) = x$. Ahora veamos la sugerencia. Resulta que
$$f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(x)$$
como queríamos. Finalmente, por unicidad del punto fijo para f^n tenemos que $f(x) = x$. Resta ver unicidad. Notemos que si y es otro punto fijo de f, entonces
$$f^n(y) = f^{n-1}(f(y)) = f^{n-1}(y) = y$$
donde esta igualdad se ve por hacer inducción en n. Así resulta que y es otro punto fijo de f^n. Nuevamente, por unicidad para f^n tenemos que $x = y$ y queda probado el ejercicio.

2. Primero queremos usar la Prueba M de Weierstrass. Fijemos x y $M > 0$ tal que $|x| < M$ y definamos para cada $N \in \mathbb{N}$
$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$
Notemos que
$$\left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| \leqslant \frac{M^{2n}}{(2n)!} = c_n.$$
Por el criterio de D'Alembert tenemos que
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{M^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{M^{2n}} = \frac{M^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
que tiende a cero cuando n tiende a infinito. Es decir,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n < \infty$$
y la Prueba M de Weierstrass indica que $(S_N(x))_{N\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy y, por lo tanto, tiene límite en $\mathbb{R}$. Entonces $c(x)$ está bien definida (para toda $x \in \mathbb{R}$). Además $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ con $S_N : \overline{B(0, M)} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a c.
Resta ver la derivabilidad. Notemos que S_N son polinomios, por lo cual son infinitamente derivables:
$$\frac{d}{dx}S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{d}{dx}x^{2n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Por comodidad llamemos
$$\tilde{S}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Siguiendo el mismo razonamiento que para $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que $(\tilde{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (con dominio acotado). Como $\frac{d}{dx}S_N = -\tilde{S}_{N-1}$ tenemos que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge y sus derivadas convergen uniformemente; por lo visto en la teórica el límite es derivable (de hecho, la derivada de c es el límite de la sucesión $(-\tilde{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$).
Si derivamos nuevamente obtenemos
$$\frac{d}{dx}\tilde{S}_{N-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = S_{N-1}(x).$$

Entonces la serie de la derivada segunda también converge uniformemente. Además $S_N''(x) = -S_{N-1}(x)$. Así el límite de la serie original es dos veces derivable. Finalmente

$$\begin{aligned}|c''(x) + c(x)| &= |c''(x) + S_N(x) + c(x) - S_N(x)| \\ &\leqslant |c''(x) - (-S_N(x))| + |c(x) - S_N(x)|\end{aligned}$$

que es tan pequeño como queramos (en función de N) y así llegamos a la igualdad pedida.

3. Sea $I = (a, b)$ un intervalo y notemos $\tilde{I} = (f(a) - K(b-a), f(a) + K(b-a)$ donde K es la constante de Lipschitz. Afirmamos que $f(I) \subseteq \tilde{I}$. Si $x \in (a, b)$, entonces

$$|f(x) - f(a)| \leqslant K|x-a| < K(b-a)$$

como queríamos. Además notemos que $\mu(\tilde{I}) = 2K\mu(I)$. Ahora dado A un conjunto nulo queremos ver que $f(A)$ es nulo (que implica ser medible de medida nula). Dado $\varepsilon > 0$, como A es nulo, existe una sucesión de intervalos abiertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon/(3K), \qquad A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Afirmamos que la sucesión de intervalos $(\tilde{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muestra lo buscado. Primero notemos que

$$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{I}_n.$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{N} \mu\left(\tilde{I}_n\right) = \sum_{n=1}^{N} 2K\mu(I_n) \leqslant 2\varepsilon/3$$

y, como $N \in \mathbb{N}$ es cualquiera, el límite también está acotado, es decir,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\tilde{I}_n\right) < \varepsilon$$

como queríamos.

4. Definamos la sucesión de funciones $(f_n)_n$ dada por $f_n = \chi_{E_n} f$. Notemos que todas las f_n con $n \geqslant n_0$ están mayoradas por $|f_{n_0}|$ que resulta integrable. Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_E f$$

donde $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Para ver esto notemos que si $x \in E$ entonces $x \in E_n$ para todo n y $f_n(x)$ es constante y vale $f(x)$. Y si $x \notin E$ entonces existe n^* tal que $x \notin E_n$ para todo $n \geqslant n^*$. Luego $f_n(x)$ es constantemente cero a partir del momento n^* y vale $f(x) = 0$. Finalmente, por el teorema de la convergencia dominada, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{E_n} f\, d\mu = \int \chi_E f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$$

como queríamos.

5. Consideremos $X = C([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^d)$ con $0 < \varepsilon < K^{-1}$ donde K es la constante Lipschitz y definamos $\phi : X \to X$ dada por

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, d\mu(s).$$

Notemos que $f(y)$ es continua si y lo es y, por lo tanto, $\phi(y)$ es continua y ϕ está bien definida. Además notemos que X es completo con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Resta ver que ϕ es una contracción. Dadas y y $\tilde{y}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\phi(y)(t) - \phi(\tilde{y})(t)| &= \left| \int_0^t (f(y(s)) - f(\tilde{y}(s)))\, d\mu(s) \right| \\
&\leqslant \int_0^t |f(y(s)) - f(\tilde{y}(s))| \; d\mu(s) \\
&\leqslant \int_0^t K \, |y(s) - \tilde{y}(s)| \; d\mu(s) \\
&\leqslant K \int_0^t \|y - \tilde{y}\|_\infty \, d\mu(s) \\
&\leqslant K \|y - \tilde{y}\|_\infty |t| \\
&\leqslant \varepsilon K \|y - \tilde{y}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como no depende de t, tenemos que

$$\|\phi(y) - \phi(\tilde{y})\|_\infty < \varepsilon K \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

y, dado que $\varepsilon K < 1$, resulta una contracción. Entonces existe un y tal que $\phi(y) = y$ y así

$$y(t) = \phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\, d\mu(s)$$

que verifica

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(0) = y_0$$

para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.