1	2	3	4	Calif.

NOMBRE Y NRO. LIBRETA:

Análisis Avanzado
Primer parcial - 19 de octubre de 2024

Nota: se aprueba con dos ejercicios bien y completos. Buena suerte, **justifique todas sus respuestas** y escriba con claridad.

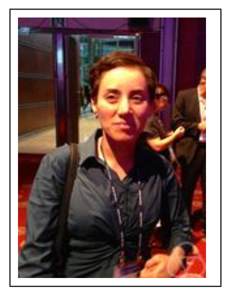
1. Consideremos A y B conjuntos en $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Probar que $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B)$.[1]

2. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{Q} : \#B = \#(\mathbb{Q} \setminus B)\}$.

3. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y no vacíos tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $diam(A_n) \to 0$ cuando n tiende a infinito cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Probar que X es completo.

4. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos con $X = C([0, 1])$ y $\mathcal{F} : X \to Y$ una función. Probar que si $\mathcal{F}$ es continua con $d = d_1$ entonces también es continua con $d = d_\infty$. ¿Vale la recíproca?

Maryam Mirzakhani (1977 – 2017) fue una matemática iraní profesora en la Universidad de Stanford que trabajó en teoría de Teichmüller, geometría hiperbólica, teoría ergódica y topología simpléctica. En 2014 fue la primera mujer en recibir la medalla Fields.



[1]Definimos el conjunto suma como $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Resoluciones

1. Dado un elemento en $A+B$ podemos escribirlo como $a+b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Luego
$$a+b \geqslant \inf(A)+\inf(B)$$
y llegamos a que $\inf(A)+\inf(B)$ es una cota inferior del conjunto suma. Es decir,
$$\inf(A+B) \geqslant \inf(A)+\inf(B).$$
Resta ver la otra desigualdad. Fijemos $\varepsilon>0$ cualquiera. Existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que
$$\begin{aligned}\inf(A) &\geqslant a-\varepsilon/2,\\ \inf(B) &\geqslant b-\varepsilon/2\end{aligned}$$
y así
$$\inf(A)+\inf(B) \geqslant a+b-\varepsilon \geqslant \inf(A)+B)-\varepsilon$$
pues $a+b \in A+B$. Y como ε era cualquiera, llegamos al resultado.

2. Llamemos $\mathcal{A}=\{B \subseteq \mathbb{Q} : \#B=\#(\mathbb{Q} \setminus B)\}$. Notemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que tiene el mismo cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y que es el cardinal de los reales $\mathbf{c}$. Por lo tanto $\#\mathcal{A} \leqslant \mathbf{c}$.
Nuevamente usando que $\mathbf{c}=\#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ construimos una función inyectiva
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbb{N}) &\to \mathcal{A}\\ B &\mapsto B \cup((1,2) \cap \mathbb{Q})\end{aligned}$$
que está bien definida pues
$$\aleph_0=\#((1,2) \cap \mathbb{Q}) \leqslant \#(B \cup((1,2) \cap \mathbb{Q})) \leqslant \#\mathbb{Q} \leqslant \aleph_0$$
y
$$\aleph_0=\#((2,3) \cap \mathbb{Q}) \leqslant \#(\mathbb{Q} \setminus(B \cup((1,2) \cap \mathbb{Q}))) \leqslant \#\mathbb{Q} \leqslant \aleph_0.$$
Esto implica que el cardinal de $\mathcal{A}$ no puede ser menor al de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Por lo tanto $\mathbf{c} \leqslant \#\mathcal{A}$ y obtenemos $\mathbf{c}=\#\mathcal{A}$.

3. Consiremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ de Cauchy, debemos probar que tiene límite. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos
$$A_n=\bigcup_{m=n}^{\infty} B(x_m, 1/n).$$
Notemos que $A_n \supseteq A_{n+1}$ y que son no vacíos. Por lo tanto $\overline{A_n}$ es cerrado, no vacío y $\overline{A_n} \supseteq \overline{A_{n+1}}$.
Necesitamos estudiar el diámetro. Fijado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $1/n_0 \leqslant \varepsilon/5$ y $d(x_n, x_m)<\varepsilon/5$ si $m,\ n \geqslant n_0$ (pues la sucesión es de Cauchy). Entonces, dados dos elementos $a,\ b \in \overline{A_n}$ con $n \geqslant n_0$, resulta que existen $a',\ b' \in A_n$ tales que $d(a, a'),\ d(b, b')<\varepsilon/5$. Además existen x_m y x_j elementos de la sucesión tales que $a' \in B(x_m, 1/n)$, $b' \in B(x_j, 1/n)$ (con $m,\ j \geqslant n_0$). Entonces
$$\begin{aligned} d(a, b) &\leqslant d(a, a')+d(a', b)\\ &\leqslant d(a, a')+d(a', x_m)+d(x_m, x_j)+d(x_j, b')+d(b', b)\\ &<\varepsilon/5+1/n+\varepsilon/5+1/n+\varepsilon/5\\ &<\varepsilon/5+\varepsilon/5+\varepsilon/5+\varepsilon/5+\varepsilon/5=\varepsilon\end{aligned}$$
y probamos que el diámetro tiende a cero.
Entonces existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. Resta ver que es el límite de la sucesión original. Dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $diam(\overline{A_n})<\varepsilon$ y luego $d(x, x_n)<\varepsilon$ pues ambos están en $\overline{A_n}$.

4. Primero veamos que dados $f \in X$ y $r > 0$ sucede que $B^{d_\infty}(f,r) \subseteq B^{d_1}(f,r)$ donde la primera bola está considerada en el espacio (X, d_∞) y la segunda, en (X, d_1). Entonces sea $g \in X$ tal que $d_\infty(f,g) < r$, luego

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \\ &\leqslant \int_0^1 \max_{z\in[0,1]} |f(z) - g(z)|\, dx \\ &= d_\infty(f,g) \end{aligned}$$

y obtenemos lo buscado.

Entonces probemos el ejercicio. Por la teórica sabemos que $\mathcal{F}$ es continua con la métrica d_1 es equivalente a que dados f y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{F}(B^{d_1}(f,\delta)) \subseteq B(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

donde la última bola es en (Y, d'). Por lo anterior tenemos que $\mathcal{F}(B^{d_\infty}(f,\delta)) \subseteq \mathcal{F}(B^{d_1}(f,\delta))$ y así

$$\mathcal{F}(B^{d_\infty}(f,\delta)) \subseteq B(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

que prueba la continuidad de $\mathcal{F}$ en (X, d_∞).

Para la última pregunta vimos en clase que la función evaluación $\mathcal{E} : X \to \mathbb{R}$ es continua en d_∞ y no en d_1, por lo cual no vale la vuelta.