

Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

- (a) \mathbb{R} con $d(x, y) = |x - y|$.
- (b) \mathbb{R}^n con $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$.
- (c) \mathbb{R}^n con $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
- (d) \mathbb{R}^n con $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.
- (e) $C([0, 1])$ con $d_\infty(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.
- (f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en \mathbb{R} :

- (a) $d(x, y) = (x - y)^2$
- (b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
- (c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

3. Considerar el conjunto \mathbb{Q} en el espacio métrico \mathbb{R} . Hallar \mathbb{Q}° y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que \mathbb{Q} no es abierto ni cerrado en \mathbb{R} .

4. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

- (a) $[0, 1]$
- (b) $(0, 1)$
- (c) \mathbb{Q}
- (d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- (e) \mathbb{Z}
- (f) $[0, 1) \cup \{2\}$
- (g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- (h) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

5. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

- (a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
- (b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.
- (c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.
- (d) Probar que $\overline{B(x, r)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.
- (e) Deducir que $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B(x, r)}$.
- (f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x, r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B(x, r)}$.
- (g) Probar que $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

6. Sea E un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. Probar que:

- (a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.
- (b) $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

7. Sea E un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Probar que:

- (a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- (b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.
- (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

8. Sean E un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E .

- (a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- (b) Probar que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.

9. Hallar frontera y puntos de acumulación de cada uno de los subconjuntos de \mathbb{R} del Ejercicio 4.

10. Sea E un espacio métrico y sea $A \subseteq E$.

- (a) Probar que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$, y concluir que ∂A es cerrado.
- (b) Probar que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

11. Sea (E, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq E$ no vacío y $x \in E$, se define la *distancia* de x a A como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Probar que para todos $x, y \in E$ y $r > 0$:

- (a) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
- (b) $x \in A \implies d(x, A) = 0$.
- (c) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
- (d) $B_A(r) = \{x \in E : d(x, A) < r\}$ es abierto.
- (e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

12. Sea (E, d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$. Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) $\widehat{d}(A, B) = \widehat{d}(\overline{A}, B)$.
- (b) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

- (c) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.
 (d) $\widehat{d}(A, B) \leq \widehat{d}(A, C) + \widehat{d}(C, B)$.

Concluir que \widehat{d} no es una distancia.

13. Consideremos en \mathbb{R}^n las distancias d_1 , d_2 y d_∞ .

- (a) Probar que estas tres distancias son equivalentes; más aún, probar que

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y).$$

- (b) Denotemos por $B_1(x, r)$, $B_2(x, r)$ y $B_\infty(x, r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias respectivamente. Deducir de (a) que

$$B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r) \subseteq B_\infty(x, r) \subseteq B_1(x, nr).$$

Cotejar estas contenciones con los dibujos hechos en el Ejercicio 1.

14. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en E .

- (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
 (b) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en E , probar que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

15. Probar que (\mathbb{R}^n, d_1) , (\mathbb{R}^n, d_2) y (\mathbb{R}^n, d_∞) son completos.

16. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $A \subseteq E$ un subconjunto de E . Probar que si A es cerrado entonces el espacio métrico (A, d) es completo.

17. *Teorema de la intersección (Cantor).* Sea E un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.