Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

Práctica 6: Sistemas de 1er. orden y ecuaciones de 2do. orden

Ejercicio 1. Hallar la solución general de los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea.

Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$.

¿Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque?

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$

Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - 8y' + 16y = 0$
(b) $y'' - 2y' + 10y = 0$
(c) $y'' - y' - 2y = 0$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

(a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.
(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?
(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

Ejercicio 7. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

(a) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (b) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(c) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$

(e) $y(0) = 1$ (f) $y'(0) = 1$

Ejercicio 8. En el interior de la Tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?

Ejercicio 9. La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina *ecuación de Euler.*

(a) Demuestre que el cambio de variables $x = e^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.

(b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

i. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

ii. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

Ejercicio 10. *Vibraciones en sistemas mecánicos.*

Una carreta de masa M está sujeta a una pared por medio de un resorte, que no ejerce fuerza cuando la carreta está en la posición de equilibrio $x = 0$. Si la carreta se desplaza a una distancia x, el resorte ejerce una fuerza de restauración igual a $-\kappa x$, donde κ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene que

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x, \quad \text{o bien } x'' + a^2x = 0, \quad a = \sqrt{\kappa/M} \tag{1}$$

(a) Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = 1/\tau$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

Si se produce una amortiguación que se opone al movimiento, y de magnitud proporcional a la velocidad ($= -c\frac{dx}{dt}$) debida al rozamieento, la ecuación (1) que describe el movimiento de la carreta en función del tiempo se convierte en

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \qquad b = \frac{c}{2M}, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}. \tag{2}$$

(b) Si $b > a$ (la fuerza de fricción debida al rozamiento es grande en comparación con la rigidez del resorte), encontrar la solución de (2) que verifique como antes $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$. Probar que no hay ninguna vibración y que la carreta vuelve simplemente a su posición de equilibrio. Se dice que el movimiento está *sobreamortiguado.*

(c) Si $b = a$, ver que tampoco hay vibración y que el comportamiento es similar al del caso anterior. Se dice que el movimiento es *críticamente amortiguado.*

(d) Si ahora $b < a$ (caso *subamortiguado*), probar que la solución de (2) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$ es

$$x(t) = x_0\frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha}\, e^{-bt}\cos(\alpha t - \theta)$$

donde $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, y $\tan\theta = b/\alpha$.

Esta función oscila con una amplitud que se reduce exponencialmente. Su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares, aunque no es periódica. Hacer un dibujo. Probar que el tiempo requerido para volver a la posición de equilibrio es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$$

y su frecuencia está dada por $f = 1/T$, llamada *frecuencia natural* del sistema. Notar que esta frecuencia disminuye al disminuir la constante de amortiguación c.

Hasta ahora hemos considerado vibraciones libres, porque sólo actúan fuerzas internas al sistema. Si una fuerza $F(t)$ actúa sobre la carreta, la ecuación será:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t). \tag{3}$$

Supongamos en lo que sigue que estamos en el caso subamortiguado.

(e) Si esta fuerza es periódica de la forma $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, con F_0, ω constantes, hallar $x(t)$. Al valor $\omega/2\pi$ se lo llama *frecuencia impresa* al sistema.

Si $\tan(\phi) = \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 M}$, probar que la solución general de (3), con $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ puede escribirse como

$$x(t) = e^{-bt}(C_1\cos(\alpha t) + C_2\sin(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

El primer término tiende a cero para $t \to +\infty$, luego es *transitorio*, es decir, a medida que pasa el tiempo, la solución se parece más y más al segundo sumando. Notar que la frecuencia de esta función es la frecuencia impresa al sistema, y que la amplitud es el coeficiente $\dfrac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}$. ¿Qué pasa cuando la frecuencia impresa se acerca a la frecuencia natural del sistema? (Este fenómeno se conoce con el nombre de *resonancia*).

(f) Hallar la frecuencia impresa ω que provoca amplitud máxima. ¿Siempre existe este valor? Este valor de frecuencia impresa (cuando existe) se denomina *frecuencia de resonancia.* Demostrar que la frecuencia de resonancia es siempre menor que la frecuencia natural.

Ejercicio 11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

(a)	$xy'' + 2y' + xy = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}.$
(b)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
(c)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{<0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
(d)	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$	$I = (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty),$	$y_1(x) = x.$

El último ítem es un caso especial de la llamada *ecuación de Legendre*, esto es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0,$$

correspondiente al caso $p = 1$, en los intervalos en que la ecuación es normal.

Ejercicio 12. Hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$, sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Ejercicio 13. Probar que las funciones

$$\phi_1(t) = \begin{cases} t^2 & t \le 0 \\ 0 & t \ge 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_2(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & t \ge 0 \end{cases}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ pero que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$. ¿Existe algún sistema lineal normal de orden 2 definido en algún intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ que admita a $\{\phi_1, \phi_2\}$ como base de soluciones?