

ANÁLISIS II - MATEMÁTICA 3 - ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PRÁCTICA 4: TEOREMAS DE STOKES Y DE GAUSS - CAMPOS CONSERVATIVOS - APLICACIONES

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0,$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 dadas por

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\},$$

orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 3. (a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S . Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) Deducir que si S es una superficie cerrada¹, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(c) Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin(x)y, e^x, -yz)$.

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ y la superficie S , en cada uno de los siguientes casos:

- (a) S es un disco de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
- (b) S es la región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

Ejercicio 5. (a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional

$$\mathbf{F} = -gmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \quad (\mathbf{x} = (x, y, z)),$$

cuando el punto de aplicación de \mathbf{F} se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de:

- i. el segmento que une los dos puntos.
 - ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonalmente.
- (b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ para \mathbf{F} .

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} en el plano es el gradiente de una función escalar f . Si existe dicha f , hallarla.

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
- (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
- (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \sin xy, x^2 \sin xy)$

¹Una superficie *cerrada* es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada

Ejercicio 7. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$, donde

- (a) $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
 (b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$, y C es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_C (y + \sin x) dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3 dz,$$

donde C es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: observar que C se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en \mathbb{R}^3 . Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B .

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$ donde \mathbf{F} es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y C es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 17 de la práctica 2 usando el teorema de Gauss.

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

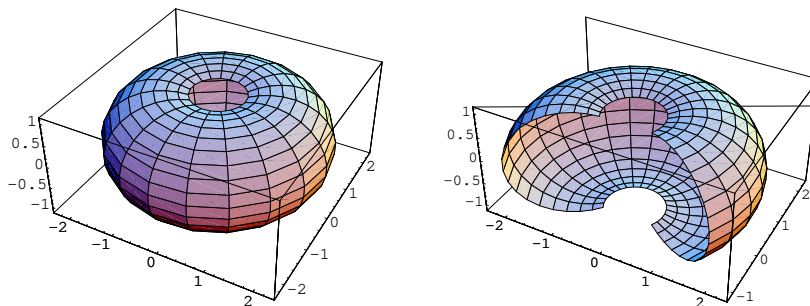
Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio \mathbf{F} dado en el Ejercicio 5 considerando como región Ω la bola unitaria en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

Ejercicio 15. Sea C la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}(2 - \cos(2\theta)), \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z . Sea S la superficie que se obtiene por *revolución* de esta curva alrededor del eje z .



En el primer dibujo se muestra la superficie S ; en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

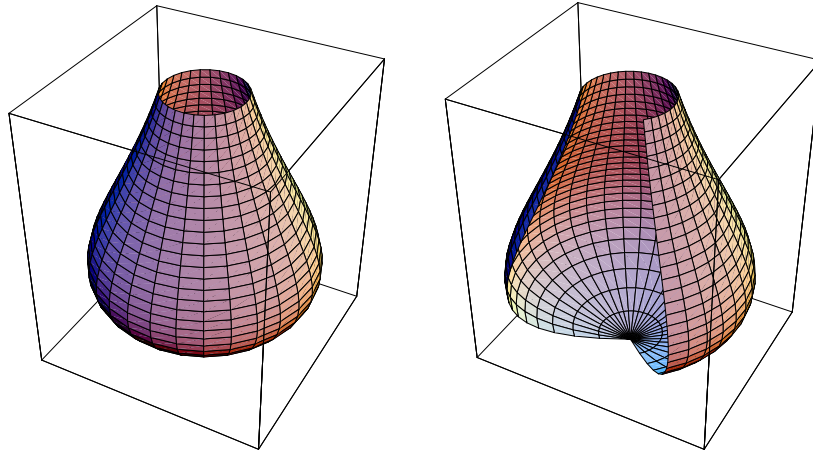
Calcular el flujo a través de S en el sentido “externo” del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

- (a) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 1)$ apunte en la dirección $(0, 1, 1)$.
 (b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.

Ejercicio 17. Dada la función $f(z) = \frac{1}{2}ze^{2-2z}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \leq z \leq 1$.



Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z - \frac{1}{2}).$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Ejercicio 18. Se sabe que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en \mathbb{R}^3 , existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt,$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

Considerar el campo gravitatorio \mathbf{F} dado en el Ejercicio 5 y verificar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$?

Sugerencia: ver el Ejercicio 13.

Ejercicio 19. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

Ejercicio 20. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - x \cos z, -yz + y \cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo \mathbf{F} a través de S_R sea máximo.

Ejercicio 21. Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Ejercicio 22. Denotemos por $T(x, y, z, t)$ a la temperatura ambiente en el punto (x, y, z) en el instante t . La *Ley de Fourier* afirma que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$, donde K es la constante de conductividad térmica.

Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$ del espacio si la temperatura está dada por $T(x, y, z, t) = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1.

Ejercicio 23. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx \, dy \, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz.$$

Aquí \mathbf{n} es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y, para una función $u \in C^2(\Omega)$ el *laplaciano* de u es $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Ejercicio 24. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* del laplaciano Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \neq 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω . En ese caso decimos que f es una *autofunción* asociada a λ .

Utilizando las identidades de Green mostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f g \, dV = 0.$$

Es decir, f y g son *ortogonales*.

Ejercicio 25. Sea B una bola en \mathbb{R}^3 . Ver que no puede haber una función $f \neq 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \quad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: utilizar las identidades de Green para deducir que $\nabla f = 0$ en B . A continuación utilizar el Ejercicio 9 para deducir que f es constante.

Ejercicio 26. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es \mathcal{C} y la circulación se da en el sentido de recorrido de \mathcal{C} inducido por la normal elegida sobre S .

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: considerar un disco de radio r como superficie S . Aplicar el teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer r tender a 0 y posteriormente utilizar que el disco era arbitrario.

Ejercicio 27*. Sea ρ la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades \mathbf{V} .

Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa es $\rho_t = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$.