Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

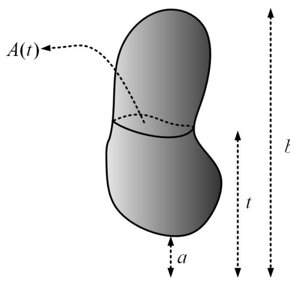
Práctica 0: Repaso de integración y cambio de variables

Principio de Cavalieri

Considere un cuerpo que ocupa una región en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$. Entonces el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^b A(t)\, dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenida al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 1. Calcular el volumen de una región cilindrica, utilizando el Principio de Cavalieri. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula *superficie de la base por altura.*

Ejercicio 2. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, utilizando el Principio de Cavalieri.

Teorema de Fubini

Ejercicio 3. Sea R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\displaystyle\iint_R x^2 y\, dA$ (b) $\displaystyle\iint_R x\cos(xy)\, dA$

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y)\, dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y)$ (b) $F(x, y) = f(x) + g(y)$

Descripción de regiones

Ejercicio 5. Sea T el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(3, 5)$. Describirlo como una región de tipo 1, y como una de tipo 2. Hallar su área.

Ejercicio 6. Graficar cada una de las siguientes regiones dadas analíticamente, y calcular el área respectiva.

(a) $-1 \leq x \leq 1 + y;\ -1 \leq y \leq 1$ (b) $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2};\ 0 \leq x \leq 1$

Ejercicio 7. Sea P la pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Describirla analíticamente. Hallar su volumen.

Aplicaciones de la integral

Ejercicio 8. (Valor medio) Hallar el valor medio de la función $f(x,y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1,1)$, $(2,0)$ y $(0,1)$.

Ejercicio 9. (Masa) Hallar la masa de la región esférica $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa ϱ es proporcional a la componente z, digamos $\varrho = \lambda z$.

Ejercicio 10. (Campo gravitatorio) Consideremos un cuerpo material con densidad $\varrho(x,y,z)$ que ocupa una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{r}$ un punto de $\mathbb{R}^3$. A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio $E(\mathbf{r})$ que aparece en el punto $\mathbf{r}$ está dado por la integral a valores vectoriales

$$E(\mathbf{r}) = -\mathfrak{g} \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\, \varrho(\mathbf{r}')\, dV(\mathbf{r}'),$$

donde $\mathfrak{g}$ es una constante universal. Notar que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \to \infty$.

A medida que $\|\mathbf{r}\| \to \infty$, la dirección del vector $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ con $\mathbf{r}' \in \Omega$ se parece más y más a la dirección de $\mathbf{r}$. Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E_0(\mathbf{r}) = -M\mathfrak{g}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\|\to\infty} \|\mathbf{r}\|^2\, \|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\| = 0.$$

Cambio de Variables

Ejercicio 11. Sean $T(u,v) = (4u+v, u+2v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,3]\times[1,3]$.

(a) Observar que $D = T(D^*)$ es un paralelogramo, y hallar su área usando geometría elemental.

(b) Observar que $T\colon D^* \to D$ es biyectiva, y hallar el área de D en términos de una integral sobre D^*.

Ejercicio 12. Sea D el paralelogramo de vértices $(1,2)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(6,6)$. Calcular

(a) $\displaystyle\int_D xy\, dxdy$ (b) $\displaystyle\int_D (x-y)\, dxdy$

Sugerencia: usar un cambio de variables para plantear ambas como integrales sobre el cuadrado $D^* = [0,1]\times[0,1]$.

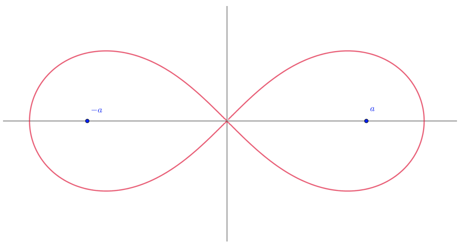
Ejercicio 13. Sean $D_1 = \{(r,\theta)\colon 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 4\pi\}$ y P la transformación dada por $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Hallar $D = P(D_1)$.

(b) Calcular $\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar.

¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

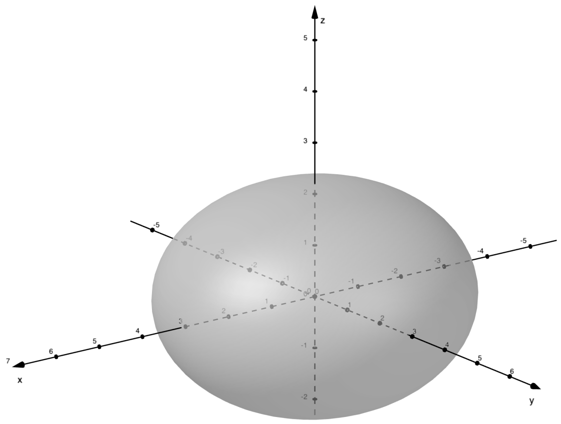
Ejercicio 14. Hallar el área acotada por la *lemniscata*, esto es, la curva dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.



Ejercicio 15. Calcular $\int_\Omega z\, dx\, dy\, dz$ donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es la región delimitada por plano xy, el cilindro dado por $x^2+y^2 \le 1$ y el cono dado por $z = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Ejercicio 16. Sea E el elipsoide dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$



(a) Hallar el volumen de E.

(b) Calcular $\displaystyle\int_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\, dxdydz$.

Ejercicio 17. Hallar el centro de masa del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si su densidad está dada por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$.

Ejercicio 18. Si un sólido $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene densidad ρ, el *momento de inercia* de Ω alrededor del eje x está definido por

$$I_x = \int_\Omega \rho\,(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

y análogamente se definen los momentos de inercia I_y e I_z.

Consideremos el sólido Ω delimitado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = \phi_0$, donde ϕ_0 es una constante tal que $0 < \phi_0 < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z, suponiendo que su densidad es constante.