Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 7

Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determine si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encuentre su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$;

ii) $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$;

iii) $\Phi\colon \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$;

iv) $\Phi\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$;

Ejercicio 2. Sea $(\mathbb{V}, \langle -, - \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Recuerde que se define la *norma* de un vector $v \in \mathbb{V}$ como $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Pruebe que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y solo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Pruebe que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle -, -\rangle\colon \mathbb{k}^{n\times n} \times \mathbb{k}^{n\times n} \to \mathbb{k},\ \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$, para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$;

ii) $\langle -, -\rangle\colon C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R},\ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$;

iii) $\langle -, -\rangle\colon \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \to \mathbb{k},\ \langle x, y\rangle = y^* Q^* Q x$, con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$; donde $Q \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es una matriz inversible;

iv) Dado $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{k}$, $\langle -, -\rangle$ un producto interno sobre $\mathbb{W}$ y $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ un monomorfismo,

$$\langle -, -\rangle_T : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{k}, \qquad \langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle.$$

Ejercicio 4.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$. Halle el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx$. Aplique el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Halle el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx$. Halle el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \sin(\pi x)$.

Sugerencia: *Observe que basta considerar el subespacio* $S =< 1, x, x^2, x^3, \sin(\pi x) >$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno $\langle -,-\rangle$. Sea $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$. Pruebe que si $x \notin \mathbb{W}$, entonces existe $y \in \mathbb{W}^{\perp}$ tal que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Ejercicio 6. Calcule la adjunta de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\}$, $\quad f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p'$, $\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

v) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $\quad f\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, f(A) = P^{-1}AP$, $\quad$ donde $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

Ejercicio 7. Sea $(\mathbb{V}, \langle -,-\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f y g endomorfismos de $\mathbb{V}$ y sea k un escalar. Pruebe que:

i) $(f+g)^* = f^* + g^*$,

ii) $(kf)^* = \overline{k}f^*$,

iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,

iv) Si f es un isomorfismo, entonces f^* es un isomorfismo y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$,

v) $f^{**} = f$,

vi) si $f^* \circ f = 0$, entonces $f = 0$.

Ejercicio 8. Sea $(\mathbb{V}, \langle -,-\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea f un endomorfismo de $\mathbb{V}$. Pruebe que $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^{\perp}$ y $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^{\perp}$.

Ejercicio 9. Sea $(\mathbb{V}, \langle -,-\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de $\mathbb{V}$. Pruebe que la proyección ortogonal $p\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sobre S es autoadjunta. Calcule sus autovalores.

Ejercicio 10. Sea $(\mathbb{V}, \langle -,-\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

i) Pruebe que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

ii) Pruebe que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

   a) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\ker(f) = \ker(f^*)$;
   b) $f - \lambda\, id_V$ es normal para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;
   c) Si v es un autovector de f de autovalor λ, entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$;
   d) E_λ es f^*-invariante.

III) Pruebe que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

Sugerencia: *observe que* $(E_\lambda)^\perp$ *es* f*-invariante y* f^**-invariante.*

IV) Deduzca de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encuentre un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decida si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encuentre la rotación, la simetría o ambas, según corresponda.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

I) Pruebe que f es una rotación.

II) Halle $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 13. Recordemos que la *distancia* entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ se define como $d(x, y) = \|x - y\|$. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si preserva las distancias, es decir, si satisface

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \qquad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^2.$$

I) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, entonces f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

II) Deduzca que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y solo si existen una transformación ortogonal $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.