Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 6

Subespacios invariantes y forma normal de Jordan

Ejercicio 1.

I) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2y,\ 2x - 2y)$. Halle todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

II) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \qquad (\lozenge)$$

Para cada θ estudie si g_θ es diagonalizable, y halle todos los subespacios g_θ-invariantes de $\mathbb{R}^2$. ¿Qué cambia si consideramos $g_\theta \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal que tiene la matriz $(\lozenge)$ en base $E = \{(1, 0), (0, 1)\}$?

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^{n-1} \neq 0$.

I) Pruebe que para cada $0 \leq j \leq n$ existe un subespacio S_j de $\mathbb{R}^n$ de dimensión j que es f-invariante.

II) Pruebe que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

Ejercicio 3.

I) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de $\mathbb{V}$ que es f-invariante, pruebe que $f\colon S \to S$ es diagonalizable.

II) Sean $A,\ B \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$ y sea $E_\lambda(A) = \{x \in \mathbb{k}^n \ /\ Ax = \lambda x\}$. Pruebe que $E_\lambda(A)$ es B-invariante.

III) Sean $A,\ B \in \mathbb{k}^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $AB = BA$. Pruebe que existe $C \in GL(n, \mathbb{k})$ tal que CAC^{-1} y CBC^{-1} son diagonales; es decir, pruebe que A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.

IV) Pruebe por inducción que si $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{k}^{n\times n}$ son matrices diagonalizables que conmutan dos a dos, entonces existe $C \in GL(n, \mathbb{k})$ tal que CA_jC^{-1} es diagonal para todo $j = 1, \ldots, r$. Deduzca que si $f_1, \ldots, f_r$ son endomorfismos de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita que conmutan dos a dos, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tal que $|f_j|_{\mathcal{B}}$ es diagonal para todo $j = 1, \ldots, r$.

Ejercicio 4. Sean $A, A' \in \mathbb{k}^{n\times n}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

I) Pruebe que ambas matrices son nilpotentes y que A es semejante a A'.

II) Sea $\partial : \mathbb{R}_{\leq n-1}[X] \to \mathbb{R}_{\leq n-1}[X]$ dada por $\partial(P) = P'$. Encuentre bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_{\leq n-1}[X]$ tales que $|\partial|_{\mathcal{B}} = A$ y $|\partial|_{\mathcal{B}'} = A'$.

III) Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{k}^n$ y sea $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ tal que $|f|_{\mathcal{B}} = A$. Pruebe que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{k}^n$ tales que $\mathbb{k}^n = S \oplus T$.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A = \langle A^j v : j \in \mathbb{N}_0 \rangle$?

Ejercicio 6. Si $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ es una transformación lineal tal que f^2 tiene un vector cíclico, pruebe que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

Ejercicio 7. Sean $A_1, \dots, A_6$ matrices nilpotentes de $\mathbb{C}^{8\times 8}$ tales que $m_{A_j} = X^3$ para todo $j \in \{1, \dots, 6\}$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 8. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$. Pruebe que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

Ejercicio 9. Halle la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicio 10. Decida si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\operatorname{rg}(A) = 6$, $\operatorname{rg}(A^2) = 4$, $\operatorname{rg}(A^3) = 3$, $\operatorname{rg}(A^4) = 1$ y $\operatorname{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhiba una tal matriz.

Ejercicio 11. Sea $V \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$ el subespacio dado por $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\partial : V \to V$ la transformación lineal definida por $\partial(f) = f'$. Halle la forma y una base de Jordan para ∂.

Ejercicio 12. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decida si A y B son semejantes.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pruebe que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\chi_A = \chi_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decida si necesariamente A es semejante a B.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos, encuentre todas las formas de Jordan posibles de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con polinomios característico y minimal dados.

I) $\chi_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2, \quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$;

II) $\chi_A(X) = (X-7)^5, \quad m_A(X) = (X-7)^2$

III) $\chi_A(X) = (X-2)^7, \quad m_A(X) = (X-2)^3$;

IV) $\chi_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4, \quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$.

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{array}{llll}
\operatorname{rg}(A-\lambda_1 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 11, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^3 = 10, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^4 = 10, \\
\operatorname{rg}(A-\lambda_2 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^2 = 11, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^3 = 10, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^4 = 9, \\
\operatorname{rg}(A-\lambda_3 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 12, & \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I)^3 = 11. &
\end{array}$$

Halle su forma de Jordan.

Ejercicio 17. Calcule las posibles formas de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ sabiendo que cumple simultáneamente:

- $X^2 - 6X + 9 \mid m_A(X)$,
- $\operatorname{rg}(A+I) = 3$ y
- $(A-3I)^3(A+I)^3(A-I) = 0$.

Ejercicio 18. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dada por $A_{ij} = x_i \cdot y_j$.

I) Calcule todos los autovalores y autovectores de A.

II) Calcule las posibles formas de Jordan de A.