Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 5

Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejercicio 1. Calcule el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de las siguientes matrices, analizando por separado los casos $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

i) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices del Ejercicio 1, sean U una base de $\mathbb{k}^n$ y $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ la transformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decida si es posible encontrar una base B de $\mathbb{k}^n$ tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcule $C(B, U)$.

Ejercicio 3. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{k}^{n\times n}$ una matriz tal que toda fila suma 1, es decir, tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Pruebe que 1 es autovalor de A y exhiba un autovector correspondiente.

Ejercicio 4. Diagonalice las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Sea $\partial : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Muestre que todo número real es un autovalor de ∂ y exhiba un autovector correspondiente.

Ejercicio 6. Halle todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 2k + k^2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2 - 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

i) Encuentre una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcule $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Halle, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Recordemos que la sucesión de Fibonacci se define como

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \qquad (i \geq 1).$$

Pruebe que

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

ii) Encuentre una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

iii) Halle una fórmula general para F_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = 2\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.
Sugerencia: *halle una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y considere el cambio de variables* $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Pruebe que A y A^t tienen los mismos autovalores. Encuentre un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 11. Analice la validez de las siguientes afirmaciones:

i) una matriz $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es inversible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

ii) si $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es inversible y v es autovector de A, entonces v es autovector de A^{-1}.

iii) si n es impar, entonces toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene un autovalor real.

Ejercicio 12.

I) Sea $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ un proyector. Pruebe que f es diagonalizable y calcule su polinomio característico.

II) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ un endomorfismo nilpotente. Calcule su polinomio característico. ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que satisface $A^2 + I_n = 0$. Pruebe que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

Ejercicio 14. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$. Pruebe que f es diagonalizable si y solo si $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = 0$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Pruebe que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

Ejercicio 16. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de χ_A contadas con multiplicidad. Pruebe que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Ejercicio 17.

I) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8, calcule los autovalores de A.

II) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$, 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de $A - 3\,I_4$. Halle los restantes autovalores de A.

Ejercicio 18. Sean $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{k}^{n\times m}$.

I) Pruebe que las matrices

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{k}^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

II) Deduzca que si $n = m$, entonces $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Ejercicio 19. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y polinomios $p \in \mathbb{C}[X]$, calcule $p(A)$.

I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p = X - 1$;

II) A como en el ítem I), $p = X^2 - 1$;

III) A como en el ítem I), $p = (X - 1)^2$;

IV) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $p = X^3 - iX^2 + 1 + i$.

Ejercicio 20. Halle el polinomio minimal de las siguientes matrices y compárelo con su polinomio característico.

I) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

II) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IV) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

V) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

VI) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

VII) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

VIII) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

IX) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

X) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

XI) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. Sea $A \in \Bbbk^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcule su polinomio minimal y su polinomio característico.

Ejercicio 22. Calcule el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales.

I) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2P$;

II) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^t$.

Ejercicio 23. Sea $\partial : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal dada por derivar. Pruebe que ∂ no admite polinomio minimal.

Ejercicio 24. Utilizando el Teorema de Cayley-Hamilton:

I) calcule $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

II) calcule A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

III) dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, exprese a A^{-1} como combinación lineal de A e I_2;

IV) dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, exprese a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A e I_2;

v) calcule $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 25. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Pruebe que f es un isomorfismo si y solo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, exprese a f^{-1} como polinomio en f.

Ejercicio 26. Exhiba una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Compare con el Ejercicio 13.

Ejercicio 27.

I) Halle una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decida si A es diagonalizable.

II) Halle una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4+4X^3+8X^2+8X+4$. Decida si A es diagonalizable.

Ejercicio 28. Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$.

I) Pruebe que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcule todos los autovalores de A.

II) Pruebe que si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es 0, entonces A es nilpotente. ¿Qué pasa si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$?

Ejercicio 29. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Pruebe que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.