Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 4

Espacio dual

Ejercicio 1. Halle una base del subespacio $S = \{\phi \in (\mathbb{R}^3)^* : \phi(1,-1,2) = 0\}$.

Ejercicio 2. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V con base B, halle la base dual correspondiente:

(i) $V = \mathbb{R}^2,\ B = \{(1,-1), (2,0)\}$,

(ii) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,

(iii) $V = \mathbb{R}_3[X],\ B = \{-X+2,\ X-1,\ X^2-3X+2,\ X^3-3X^2+2X\}$.

Ejercicio 3. Sea $B' = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\phi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2, \qquad \phi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3, \qquad \phi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3.$$

Halle la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

Ejercicio 4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ los siguientes funcionales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx.$$

(i) Pruebe que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

(ii) Halle una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Ejercicio 5. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión n.

(i) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* \setminus \{0\}$, demuestre que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$ si y solo si $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

(ii) Sean $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r \in V^*$. Supongamos que para todo $x \in V$ tal que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0$, se tiene que $\varphi(x) = 0$. Pruebe que $\varphi \in \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_r \rangle$.

(iii) Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Pruebe que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es base de V^* si y solo si

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) = 0.$$

Ejercicio 6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la base canónica.

(I) Calcule las coordenadas de φ en E^*.

(II) Calcule las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

(III) Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1+3x_2-x_3 = 0\}$ y $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encuentre una ecuación para S en la base B.

Sugerencia: *recuerde que B^* es la base dual de B y no haga ninguna cuenta.*

Ejercicio 7. Consideremos la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encuentre las coordenadas de la base dual de B en la base E^* dual a la base canónica.

Ejercicio 8. Sean $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B_1^*, calcule sus coordenadas respecto de B_2^*.

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V junto con subespacios $S \leq V$, halle una base de S°.

(I) $V = \mathbb{R}^3, S = \langle(1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0)\rangle$.

(II) $V = \mathbb{R}^4, S = \langle(1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1)\rangle$.

(III) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 10. Sea $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 3$. Calcule $f(B)$.

Ejercicio 11. Para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V y subespacios S y T de V, determine una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

i) $V = \mathbb{R}^4, S = \langle(1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1)\rangle, T = \langle(2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3)\rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}^4,\ S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}, T = \langle(2, 1, 3, 1)\rangle$.

Ejercicio 12. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, consideramos un vector $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la transformación lineal definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \ldots & v_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

Pruebe que si $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es linealmente independiente, entonces $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle^\circ = \langle\varphi\rangle$.

Ejercicio 13. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Pruebe que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

Ejercicio 14. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $\operatorname{tr} : \Bbbk^{n\times n} \to \Bbbk$ el funcional lineal traza. Dada $A \in \Bbbk^{n\times n}$, se define $f_A\colon \Bbbk^{n\times n} \to \Bbbk$ como $f_A(X) = \operatorname{tr}(A \cdot X)$.

(I) Pruebe que $f_A \in (\Bbbk^{n\times n})^*$ para cada $A \in \Bbbk^{n\times n}$.

(II) Pruebe que si $f_A(X) = 0$ para cada $X \in \mathbb{k}^{n\times n}$, entonces $A = 0$.

(III) Se define $\gamma\colon \mathbb{k}^{n\times n} \to (\mathbb{k}^{n\times n})^*$ por $\gamma(A) = f_A$. Pruebe que γ es un isomorfismo.

(IV) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encuentre una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\gamma(A) = f$.

Ejercicio 15. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_{x_0} \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ como $\varphi_{x_0}(p) = p'(x_0)$. Sea $T = \langle \{\varphi_{x_0} : x_0 \in \mathbb{R}\}\rangle \leq (\mathbb{R}_3[X])^*$. Halle ${}^{\circ}T$ y una base de T.

Ejercicio 16. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in (\mathbb{k}^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(A\cdot B) = \varphi(B\cdot A)$ para cada $A, B \in \mathbb{k}^{n\times n}$.

(I) Pruebe que existe $\alpha \in \mathbb{k}$ tal que $\varphi = \alpha\ \mathrm{tr}$.

(II) Deduzca que si $\varphi(E_{11}) = 1$, entonces $\varphi = \mathrm{tr}$.

(III) Deduzca que si $n \neq 0$ en $\mathbb{k}$ y $\varphi(I_n) = n$, entonces $\varphi = \mathrm{tr}$.

Ejercicio 17. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ tales que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, se define la transformación lineal $\mathrm{ev}_{\alpha_i} : \mathbb{k}_n[X] \to \mathbb{k}$ dada por $\mathrm{ev}_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.

(I) Pruebe que $B_1 = \{\mathrm{ev}_{\alpha_0}, \dots, \mathrm{ev}_{\alpha_n}\}$ es una base de $(\mathbb{k}_n[X])^*$.

(II) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $\mathbb{k}_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Pruebe que dados $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{k}$ el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i$$

es el único polinomio en $\mathbb{k}[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para todo i. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

(III) Pruebe que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i\, P(\alpha_i).$$

Halle a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

Ejercicio 18. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $f\colon V \to W$ una transformación lineal. Se define la función *transpuesta* $f^t\colon W^* \to V^*$ de f como

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f.$$

(I) Pruebe que f^t es una transformación lineal.

(II) Pruebe que $\mathrm{im}(f)^{\circ} = \ker(f^t)$ y que $\mathrm{im}(f^t) = \ker(f)^{\circ}$.

(III) Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ y $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$. Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcule $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^*B^*}$.

(IV) Si B_1 y B_2 son bases de V y W respectivamente, pruebe que

$$|f^t|_{B_2^*B_1^*} = (|f|_{B_1B_2})^t.$$